Chapitre 3

Fonctions caractéristiques

3.1 Transformé de Fourier d'une mesure bornée

Définition 3.1. *Soient* $x = (x_1, ..., x_n)^t$ *et* $y = (y_1, ..., y_n)^t$ *deux éléments de* $\mathbb{R}^n$*. Le produit scalaire usuel de* x *et* y *est donné par :*

$$< x, y >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Définition 3.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et les variables aléatoires considérées sont supposées définies sur cet espace.* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ *est un espace mesurable où* $\mathbb{R}^n$ *est muni de la tribu de Borel* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$*. Une variable aléatoire* X *à valeurs complexes est une application mesurable de la forme*

$$X = X_1 + iX_2$$

pour deux variables aléatoires réelles X_1 *et* X_2 *appelées partie réelle et partie imaginaire de* X *respectivement.*

Définition 3.3. *On dit qu'une variable aléatoire complexe* X *est intégrable si les v.a.r.* X_1 *et* X_2 *sont intégrables. Dans ce cas l'espérance de* X *est alors définie par :*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + i\mathbb{E}(X_2).$$

Définition 3.4. ***Transformée de Fourier d'une mesure bornée.*** *Soit* μ *une mesure bornée sur* $\mathbb{R}^n$ *muni de sa mesure borélienne* μ*. On appelle transformée de Fourier de* μ *l'application* $\hat{\mu}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,t>} \mu(dx).$$

Remarque 3.1.1. *La transformée de Fourier d'une mesure bornée est bien définie étant donné que*

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} \mid e^{i<x,t>} \mid \mu(dx) \leq \mu(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

De plus, si la mesure bornée μ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,t>} f(x)dx.$$

On définit alors la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à partir de la transformée de Fourier de sa densité.

3.2 Fonctions caractéristiques d'un vecteur aléatoire

Définition 3.5. ***Fonction caractéristique.*** *Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. On appelle fonction caractéristique de X et on note ϕ_X la transformée de Fourier de sa loi $\mathbb{P}_X$ c'est-à- dire la fonction vectorielle et à valeurs complexes définie par :*

$$\phi_X : \quad \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ t \to \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,t>} d\mathbb{P}_X. \end{array} .$$

La loi d'une variable aléatoire étant par construction une mesure de probabilité, ϕ_X existe pour toute variable aléatoire X. De plus, d'après le théorème de transfert $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i<X,t>}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n t_j x_j}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it'x} f_X(x)dx.$

Définition 3.6. *La fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire discret X de loi P_X est donnée par :*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i<X,t>}\right] = \sum_j e^{it'x} \mathbb{P}_X(X_j = x_j).$$

Exemple 3.2.1. *Soit X une v.a. unidimensionnelle suivant une loi géométrique $G(p)$ avec $p \in]0,1[$. Calculons sa fonction caractéristique.*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : \phi_X(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} e^{itk} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)e^{it}\right)^k \\ &= \frac{p}{1-p} . \frac{(1-p)e^{it}}{1-(1-p)e^{it}} = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $Exp(\lambda)$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : \phi_X(t) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it}. \end{aligned}$$

Théorème 3.2.1. *Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^t$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. La fonction caractéristique ϕ_X de X vérifie les propriétès suivantes :*

(i) $\forall u \in \mathbb{R}^n$: $\mid \phi_X(u) \mid \leq \phi_X(0) = 1$ *où* 0 *est le vecteur nul de* $\mathbb{R}^n$ *;*

(ii) $\forall j \in \{0, 1, ..., n\}$ *et* $\forall u_j \in \mathbb{R} : \phi_{X_j}(u_j) = \phi_X(0, ..., u_j, ..., 0)$

(iii) $\forall u \in \mathbb{R}^n$: $\overline{\phi_X(u)} = \phi_X(-u)$.

(iv) *Si on pose* $Y = AX + b$ *où* A *est une matrice* $p \times n$ *et* b *un vecteur de* $\mathbb{R}^p$ *on a, pour tout* u *dans* $\mathbb{R}^p$ *:*

$$\phi_Y(u) = e^{i<u,b>}\phi_X(A^t u),$$

où A^t *est la matrice transposée de* A.

Démonstration. **(i)** *On a*

$$\begin{aligned} \mid \phi_X(u) \mid &= \mid \int e^{i<u,x>} d\mathbb{P}_X \mid \leq \int \mid e^{i<u,x>} \mid dP_X \\ &= \int dP_X(x) = 1 \end{aligned}$$

et

$$\phi_X(0) = 1.$$

(ii) *Par définition, on a :*

$$\phi_X(0) = (0, ..., u_j, ..., 0) = \mathbb{E}(e^{iu_j X_j}) = \phi_{X_j}(u_j).$$

(iii) *On peut écrire :*

$$\begin{aligned} \phi_X(-u) &= \mathbb{E}\left(e^{i<-u,X>}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-i<u,X>}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\overline{e^{i<u,X>}}\right) = \overline{\mathbb{E}\left(e^{-i<u,X>}\right)} = \overline{\phi_X(u)}. \end{aligned}$$

(iv) *On a*

$$\begin{aligned} \phi_Y(u) &= \mathbb{E}\left(e^{i<u,Y>}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i<u,AX>+i<u,b>}\right) \\ &= e^{i<u,b>}\mathbb{E}\left(e^{i<A'u,X>}\right) = e^{i<u,b>}\phi_X(A'u). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2. *Une famille $(X_j)_{j=1,...,n}$ constitue une famille de v.a.r. indépendantes si et seulement si, pour tout $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\phi_{(X_1,...,X_n)}(u) = \prod_{j=1}^{n} \phi_{X_j}(u_j).$$

Démonstration. *On a*

$$\phi(u) = \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^{n} u_j X_j}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu_1X_1} \times ... \times e^{iu_nX_n}\right].$$

D'autre parts, si $X_1 \perp X_2 \perp ... \perp X_n$*, alors on a* $h_1(X_1) \perp h_2(X_2) \perp ... \perp h_n(X_n)$*avec* $h_i(X_i) = e^{it_jX_j}$*, ce qui implique le résultat*

$$\mathbb{E}\left[h_1(X_1)...h_n(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[h_1(X_1)\right]...\mathbb{E}\left[h_n(X_n)\right].$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\left[e^{iu_1X_1}...e^{iu_nX_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu_1X_1}\right]...\mathbb{E}\left[e^{iu_nX_n}\right],$$

c'est-à-dire

$$\phi_{(X_1,...,X_n)}(u) = \prod_{j=1}^{n} \phi_{X_j}(u_j).$$

Exercice 3.2.3. *Quelle est l'expression de la fonction caractéristique pour* $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *si les variables* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont indépendantes et identiquement distribuées (iid) ?*

Solution. *On a :*

$$\phi_Y(u) = \mathbb{E}(e^{iuY}) = \mathbb{E}\left[e^{iu(X_1+X_2+...+X_n)}\right].$$

Puisque $X_1 \perp X_2 \perp ... \perp X_n$*, on a* $\mathbb{E}\left[e^{iuX_1} \times ... \times e^{iuX_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iuX_1}\right]...\mathbb{E}\left[e^{iuX_n}\right]$*, on peut donc écrire* $\phi_Y(u) = \phi_{X_1}(u) \times ... \times \phi_{X_n}(u)$*. Puisque les variables sont identiquement distribuées, leur fonction caractéristique et identique et l'onbtient*

$$\phi_Y(u) = [\phi_{X_1}(u)]^n.$$

3.3 Moments et fonction caractéristique

Moments de variables aléatoires réelles

Définition 3.7. *(**Espace** L^p). Soit p un réel tel que $1 \leq p < \infty$. On dit qu'une variable aléatoire X appartient à l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si elle est de puissance p-intégrable, i.e. si*

$$\mathbb{E} \mid X \mid^p < \infty.$$

La norme sur sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est :

$$\parallel X \parallel_p = \mathbb{E}(\mid X \mid^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \mid X \mid^p d\mathbb{P}_X\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 3.8. *Pour une variable aléatoire X dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on appelle*

- *Moment d'ordre p le réel :* $\mathbb{E}X^p$.
- *Moment absolu d'ordre p le réel :* $\mathbb{E} \mid X \mid^p$.
- *Moment centré d'ordre p le réel :* $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^p)$.

Théorème 3.3.1. ***(Inégalité de Hölder)****. Pour tous réels p et q tels que $p > 1$, $q > 1$ et$1/p + 1/q = 1$ et toutes $v.a.X$ et Y respectivement dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a*

$$\| XY \| \leq \| X \|_p \| Y \|_q .$$

Théorème 3.3.2. ***(Inégalité de Minkowski)****. Pour tous réels p et q tels que $p > 1$, $q > 1$ et $1/p + 1/q = 1$ et toutes $v.a.X$ et Y respectivement dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a*

$$\| X + Y \| \leq \| X \|_p + \| Y \|_q .$$

Définition 3.9. *(**Espace** L^2) L'inégalité de Hölder, vue précédemment, appliquée pour $p = q = 2$ est souvent appelée inégalité de Schwartz.*

Proposition 3.3.3. *Soit X et Y deux v.a.r. dans L^2. On a*

$$\| X + Y \| \leq \| X \|_2 \| Y \|_2 .$$

Définition 3.10. *(**N**ormes usuelles sur $\mathbb{R}^n$)*
- *Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \in]0, \infty[$: $x \mapsto \| x \|_p = (\sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^p)^{\frac{1}{p}}$.*
- *Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \in]0, \infty[$: $x \mapsto \| x \|_\infty = \sup_i \mid x_i \mid$.*
- *Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\| x \|_1 = \mid x_1 \mid + ... + \mid x_n \mid$. Norme L^1*

Théorème 3.3.4. *Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^t$ un vecteur aléatoire. Si $\| X \|_k$ admet une espérance finie pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors ϕ_X est k fois continûment différentiable et on a :*

$$\frac{\partial^k \phi_X}{\partial u_{j_1} ....\partial u_{j_k}}(u) = i^k \mathbb{E}[X_{j_1} X_{j_2} ... X_{j_k} e^{i<u,X>}], \tag{3.1}$$

pour tout $u = (u_1, ..., u_n)^t \in \mathbb{R}^n$ et tout entiers $j_1, ..., j_k$ distincts choisis dans $\{1, 2, ..., k\}$. En particulier, on a

$$\frac{\partial^k \phi_X}{\partial u_{j_1} ....\partial u_{j_k}}(0) = i^k \mathbb{E}[X_{j_1} X_{j_2} ... X_{j_k}]. \tag{3.2}$$

Application

Calcul des moments $\mathbb{E}(X_1 ... X_n)$ en fonction des dérivées de ϕ_X en 0. Par exemple, si X est à valeurs réelles et de carré intégrable, on a

$$\mathbb{E}(X) = i\phi'_X(0); \mathbb{E}(X^2) = -\phi''_X(0).$$

3.4 Fonction génératrice

Définition 3.11. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X et on note G_X la fonction définie sur le disque unité du plan complexe par :*

$$\forall \mid u \mid \leq 1, G_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_n u^n \mathbb{P}(X = n).$$

On note que

$$G_X(1) = 1 \;\; et \;\; \phi_X(u) = G_X\left(e^{iu}\right).$$

Proposition 3.4.1.

1. *La fonction génératrice G_X est continue sur son domaine de définition et est de classe C^1 sur le domaine $(|u| < 1)$.*
2. *La fonction génératrice G_X caractérise la loi $\mathbb{P}_X$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$*
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0).$$
3. *La fonction génératrice G_X admet une dérivée à gauche en 1 $G_X^{'}(1)$ si et seulement si $\mathbb{E}(X)$ existe et est fini. Dans ce cas*
$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1).$$
4. *Plus généralement, la fonction génératrice G_X admet une dérivée à gauche d'ordre $r (r \in \mathbb{N}^*)$ en 1 ssi le moment factoriel d'ordre r existe et est fini. Dans ce cas :*
$$\mathbb{E}\left(X(X-1)...(X-r+1)\right) = G_X^{(r)}.$$
En particulier
$$\mathbb{E}\left(X(X-1)\right) = G''_X(1), V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$
5. *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a entières indépendantes. On pose*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Alors
$$\forall \mid u \mid \leq 1, G_{S_n}(u) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(u).$$

3.4.1 Fonction génératrice des moments

Définition 3.12. *Soit X une variable aléatoire réelle. On considère la fonction de variable réelle u*

$$g_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}), u \in \mathbb{R}.$$

Si g_X est définie dans un voisinage ouvert de l'origine, elle est appelée fonction génératrice des moments de X.

Proposition 3.4.2. *Soit X une v.a de fonction génératrice des moments g_X.*

1. *La fonction g_X est convexe et caractérise la loi de X.*
2. *Pour tous réels a et b, on a*
$$g_{aX+b}(u) = e^{bu} g_X(au).$$
En particulier si la loi de X est symétrique alors g_X est paire.
3. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices des moments g_X et g_Y respectivement. Alors la somme $X + Y$ admet une fonction génératrice des moments et*
$$g_{X+Y} = g_X g_Y.$$

Théorème 3.4.3. *[9] Soit X une v.a de fonction génératrice des moments g_X. On suppose que g_X est définie sur un intervalle ouvert I centré en 0. Alors*

1. *Pour tout $r \geq 1$*
$$\mathbb{E}(X^r) < \infty \;\; g_X^{(r)}(0) = \mathbb{E}(X^r).$$
2. *Pour tout $u \in I$*
$$g_X(u) = 1 + \sum_{r \geq 1} \frac{u^r}{r!} \mathbb{E}(X^r).$$