1. Déterminer la loi du vecteur X_n.
2. Les variables aléatoires R_n, V_n et B_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer G_X, la fonction génératrice du vecteur X_n.
4. Soit N une variable aléatoire discrète indépendante de la suite $(X_n)n \geq 1$.
   On pose
   $$R_N = R_n, V_N = V_n \;\; et \;\; B_N = B_n \;\; si \;\; N = n.$$
   a. Utiliser le résultat de la première question et la loi de la variable aléatoire N pour calculer la loi du vecteur $X_N = (R_N, V_N, B_N)$.

   b. Montrer que les composantes de X_N sont indépendantes dans le cas où N suit une loi de Poisson.

   c. On désigne par G_N la fonction génératrice de la variable N : Calculer la fonction génératrice G_{XN} du veteur X_N en fonction de G_N. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Chapitre 4

Vecteur aléatoire gaussien (normal)

Les vecteurs gaussiens sont associés aux lois gaussiennes multivariées, et de ce fait jouent un rôle important en probabilités et en statistique. Ils apparaissent naturellement comme des objets limites et serviront en particulier dans le prochain chapitre.

4.1 Vecteur aléatoire gaussien

Définition 4.1. Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses coordonnées est une variable aléatoire gaussienne i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j$ suit une loi gaussienne.

Puisque la loi du vecteur aléatoire gaussien X est totalement déterminée par la donnée du vecteur espérance μ et de la matrice de covariance Σ_X, on écrit $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$ et on dira que X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$.

Remarque 4.1.1.

- Si les composantes X_i sont des variables aléatoires gaussienne indépendantes, le vecteur X est gaussien .
- Si les composantes X_i sont de loi gaussienne mais pas indépendantes, il se peut que X ne soit pas un vecteur gaussien. Prenons par exemple X_1 de loi $N(0,1)$, et

$$X_2 = \begin{cases} X_1 & si \quad | X_1 | \leq 1 \\ -X_1 & sinon. \end{cases}$$

Alors $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$, mais $X = (X_1, X_2)$ n'est pas un vecteur gaussien, puisque $0 < \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) < 1$ (donc $X_1 + X_2$ ne suit pas une loi normale).

Proposition 4.1.1. *Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Tout vecteur aléatoire gaussien $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ de dimension n à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Chaque composante de X est une variable aléatoire gaussienne appartenant à $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;*
2. *Le vecteur aléatoire X est intégrable et $\mathbb{E}(X) = \mu_X = (\mu_1, ..., \mu_n)^t$;*
3. *Le vecteur aléatoire X admet une matrice de covariance $\Sigma_X = \Sigma$.*

Proposition 4.1.2. Soient $\mu \in \mathbb{R}^n$ et $\Sigma \in \mathcal{M}_{n\times n}$ une matrice symétrique positive. Il existe alors un vecteur gaussien X de vecteur moyenne μ_X et de matrice de covariance Σ_X.

Démonstration. Soit $Z = (Z_1, ..., Z_n)$ un vecteur de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Z est un vecteur gaussien de vecteur moyenne $\mu_Z = 0_n$ et de matrice de covariance $\Sigma_Z = I_n$.
- Σ étant symétrique positive, il existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ symétrique telle que $\Sigma = B^2$.
  Posons $X = BZ + \mu$.
- X est un vecteur gaussien de moyenne et de matrice de covariance respectives

$$\mu_X = B\mu_Z + \mu = \mu; \Sigma_X = B\Sigma_Z B^t = B^2 = \Sigma.$$

Exemple 4.1.1. *Montrer qu'il existe un vecteur gaussien de matrice de covariance et de vecteur moyenne*

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. La matrice Σ_X est bien symétrique.
Pour tout $X = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} x^t\Sigma_X x &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2(x_1^2 + x_1x^2 + x_1x_3 + x_2^2 + x^2x_3 + x_3^2) \\ &= (x_1 + \frac{x_2}{2} + x_3^2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 + \frac{x_3}{3})^2 + \frac{23}{36}x_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

En définitive, Σ_X est symétrique positive.
D'aprés la proposition précédente, nous en déduisons qu'il existe un vecteur gaussien de vecteur moyenne μ_X et de matrice de covariance Σ_X.

Exemple 4.1.2. ***Cas particulier***. *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendates de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer le vecteur moyenne et la matrice de covariance de $X = (X_1, ..., X_n)$.*
On a pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$, donc

$$\mu_X = (0, ..., 0)^t.$$

De plus, pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; i = j \\ 0 \;\; sinon. \end{cases}$$

Par conséquent, $\Sigma_X = I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.1.3. Si X est un vecteur aléatoire gaussien de vecteur espérances $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)^t$ et de matrice de covariance Σ_X , alors, pour tout λ dans $\mathbb{R}^n$, la v.a. $\lambda' X$ est de loi $\mathcal{N}(\lambda'\mu, \lambda'\Sigma_X\lambda)$.

Démonstration. On utilise d'abord le fait que, par définition d'un vecteur gaussien, la v.a. $\lambda' X$ est de loi normale. Il ne reste plus qu'à calculer son espérance et sa variance. On utilise alors les résultats vus au chapitre 2, pour obtenir :

$$\mathbb{E}(\lambda' X) = \lambda'\mathbb{E}(X) = \lambda'\mu_X$$

et

$$\Sigma_{\lambda' X} = \lambda'\Sigma_X\lambda.$$

On peut aussi caractériser un vecteur gaussien par sa fonction caractéristique, grâce à la proposition suivante.

Proposition 4.1.4. On dit que n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont conjointement gaussiennes, ou que le vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)^t$ est gaussien de dimension n sur $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, s'il existe un vecteur colonne $\mu \in \mathbb{R}^n$ et une matrice Σ_X de n lignes et n colonnes symétrique telle que la fonction caractéristiqe de X soit de la forme :

$$\Phi_X(u) = \exp[i < u, \mu >] \exp[-\frac{1}{2}u^t\Sigma u] \;\; pour \;\; tout \;\; u \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Démonstration.
avec

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} u_j X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = u'\mu$$

et

$$\begin{aligned} Var(Y) &= Var\left[\sum_{j=1}^{n} u_j X_j\right] = \sum_{j}^{n}\sum_{k}^{n} Cov(u_j X_j, u_k X_k) \\ &= \sum_{j}^{n}\sum_{k}^{n} u_j u_k Cov(X_j, X_k) = u^t\Sigma u. \end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$ Par définition, on a :

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iu^tX}] = \mathbb{E}[e^{iY}] = \phi_Y(1),$$

où $Y = \sum_{j=1}^{n} u_j X_j$. La variable aléatoire Y est une variable aléatoire gaussienne puisque c'est une combinaison linéaire des coordonnées du vecteur gaussien X.
On a

$$\phi_Y(1) = e^{i\mathbb{E}Y} e^{-\frac{Var(Y)}{2}},$$

avec

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} u_j X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = u'\mu$$

et

$$\begin{aligned} Var(Y) &= Var\left[\sum_{j=1}^{n} u_j X_j\right] = \sum_{j}^{n}\sum_{k}^{n} Cov(u_j X_j, u_k X_k) \\ &= \sum_{j}^{n}\sum_{k}^{n} u_j u_k Cov(X_j, X_k) = u^t \Sigma u. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) *Soit* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)^t$. *On pose* $Y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j = \lambda' X$. *Montrons que* Y *est une variable aléatoire gaussienne. Pour* $u \in \mathbb{R}$, *la fonction caractéristique de Y est donnée par :*

$$\begin{aligned} \phi_Y(u) &= \mathbb{E}\left[e^{iu\lambda^t X}\right] = \phi_X(u\lambda) \\ &= e^{i(u\lambda)^t\mu - \frac{1}{2}(u\lambda)^t \Sigma_X u\lambda}. \\ &= e^{iu\lambda^t u - \frac{1}{2}u^2\lambda^t\Sigma_X\lambda}. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi gaussienne $\mathcal{N}(\lambda^t\mu, \lambda^t\Sigma\lambda)$. Donc Y est bien une variable aléatoire gaussienne.

Remarque 4.1.2. Un vecteur gaussien de matrice de covariance Σ_X telle que $det(\Sigma_X) = 0$ (i.e.Σ_X non inversible) est dit dégénéré et n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.1.5. Un vecteur aléatoire $X \backsim \mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$ est absolument continu si et seulement si sa matrice de covariance Σ_X est inversible. Dans ce cas, la densité de probabilité de X est

$$f_X(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{det(\Sigma_X)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^t \Sigma_X^{-1}(x-\mu_X)\right], avec$$

X=$(X_1, ..., X_n)^t$.

4.1.1 Quelques cas particuliers

- $n = 1$. *Posons* $\mu_X = \mu$, $\Sigma_X = (\sigma^2)$. *On obtient :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

On retrouve la densite de la loi normale univariee de moyenne μ *et variance* σ^2.

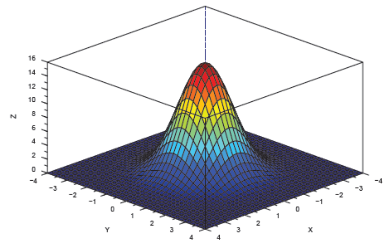

FIGURE 4.1 – Densité gaussienne en dimension deux

- *$n = 2$. Posons $\mu_X = (\mu_1, \mu_2)^t$. On peut écrire Σ_X sous la forme :*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{X1}^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

avec $(\sigma_1 > 0)$ et $(\sigma_2 > 0)$. On a alors $(det\,(\sum_X)) = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{1,2}^2)$ et Σ_X est une matrice définie positive puisque $|\rho_{1,2}| < 1$. De plus,

$$\Sigma_X^{-1} = \frac{1}{det\,(\Sigma_X)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho_{1,2}^2)}} \times \\ & \exp\left(\frac{1}{2(1-\rho_{1,2}^2)}\right)\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{1,2}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

4.2 Distributions marginales et conditionnelles

Supposons que l'on définisse la partition suivante :

$$X = \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}; \mathbb{E}(X) = \mu_X = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_b \end{pmatrix}; \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix};$$

où

- μ_a et Σ_{aa} sont le vecteur espérance et la matrice de covariance du vecteur aléatoire X_a ;
- μ_b et Σ_{bb} sont le vecteur espérance et la matrice de covariance du vecteur aléatoire X_b ;
- $\Sigma_{ab} = \Sigma'_{ba}$ matrice des covariances entre les variables de X_a et les variables de X_b.

Théorème 4.2.1. *[3].* Soit X un vecteur aléatoire absolument continu. Si $X = (X_a, X_b)^t \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma_X)$, alors

$$X_a \sim \mathcal{N}(\mu_a, \Sigma_{aa}) \ ; \ X_b \sim \mathcal{N}(\mu_a, \Sigma_{bb}).$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, on sait que $\phi(u) = e^{iu^t\mu - \frac{1}{2}u^t\Sigma_X u}$. D'autre part le partitionnemment des vecteurs u, μ_X et Σ_X. On peut écrire $\phi(u) = \phi(u_a, u_b)$ avec

$$u^t\mu = (u_a, u_b)\begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_b \end{pmatrix} = u_a^t\mu_a + u_b^t\mu_b, u^t\sum u = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \sum_{aa} & \sum_{ab} \\ \sum_{ba} & \sum_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}.$$

La fonction caractéristique marginale de X_a est donnée par

$$\phi_{X_a}(u_a) = \phi_X(u_a, 0),$$

c'est-à dire en posant $u_b = 0$ dans les expressions précédentes. En effectuant les produits matriciels. On obtient ainsi

$$\phi_{X_a}(u_a) = e^{iu_a^t\mu_a - \frac{1}{2}u_a^t\sum_{aa}u_a},$$

qui est bien la fonction caractéristique d'un vecteur normal dont le vecteur espérance est μ_a et la matrice de covariance est $\sum_{aa}$. La démonstration pour X_b est similaire en posant $u_a = 0$.

Définition 4.2. *Les fonctions de densité de probabilité marginales des vecteurs X_a et X_b sont données par :*

$$f_{X_a}(x_a) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_a} det(\sum_{aa})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_a - \mu_a)^t \sum_{aa}^{-1}(x_a - \mu_a)\right);$$

$$f_{X_b}(x_b) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_b} det(\sum_{bb})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_b - \mu_b)^t \sum_{bb}^{-1}(x_b - \mu_b)\right).$$

Théorème 4.2.2. *[3].* Soit X un vecteur aléatoire absolument continu. Si $X = (X_a, X_b)^t \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, alors :

$$[X_a/X_b = x_b] \sim \mathcal{N}(\mu_{a/b}, \Sigma_{a/b}) \ ; \ X_b/X_a = x_a \sim \mathcal{N}(\mu_{b/a}, \Sigma_{b/a}),$$

avec :

$$\mu_{a/b} = \mu_a + \Sigma_{ab}^{-1}\Sigma_{bb}^{-1}(x_b - \mu_b) \ ; \ \Sigma_{a/b} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba};$$

$$\mu_{b/a} = \mu_b + \Sigma_{ba}^{-1}\Sigma_{aa}^{-1}(x_a - \mu_a) \ ; \ \Sigma_{b/a} = \Sigma_{bb} - \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab}.$$

Démonstration. *Par définition, la loi conditionnelle* $f_{X_b/X_a=x_a}(x_b) = \frac{f_X(x)}{f(x_a)}$. *D'autre part, en partitionnant les vecteurs* x, μ *et la matrice* Σ, *on peut écrire :*

$$det\,(\Sigma) = det\begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix} = det\,(\Sigma_{aa})\,det\left(\Sigma_{bb} - \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab}\right)$$

$$(x-\mu)^t\Sigma^{-1}(x-\mu) = det\left(\Sigma^{-1}\right)\begin{pmatrix} x_a - \mu_a \\ x_b - \mu_b \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_a - \mu_a \\ x_b - \mu_b \end{pmatrix}$$

avec

$$det\left(\Sigma_X^{-1}\right) = \frac{1}{det\,(\Sigma_X)}$$

et

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma_{aa}^{-1} & 0 \\ -S^{-1}\Sigma_{aa}\Sigma_{aa}^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$S = \Sigma_{bb} - \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab}.$$

On obtient :

$$f(x_b/x_a) = \frac{1}{(2\pi)^{n_b} det\left(\Sigma_{a/b}\right)} e^{-\frac{1}{2}(x_b-\mu_{b/a})^t\Sigma_{b/a}(x_b-\mu_{a/b})}.$$

Si l'on pose

$$\mu_{a/b} = \mu_a + \Sigma_{ab}^{-1}\Sigma_{bb}^{-1}(x_b - \mu_b)\ \ ;\ \ \Sigma_{a/b} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba},$$

l'expression $f_{X_b/X_a=x_a(x_b)}$ *est bien celle de la fonction de densité de probabilité d'un vecteur normal dont le vecteur espérance est* $\mu_{a/b}$ *est la matrice de covariance est* $\Sigma_{a/b}$.

Exercice 4.2.3. *[3].* On a mesuré simultanément la hauteur X_1 (en centimètre), le logarithme népérien X_2 du poids (en kilogrammes) et le pourcentage X_3 de graisse (en pourcentage % du poids total) pour un grand nombre d'hommes de type européen agés de 50 à 80 ans . Ceci a permis de déterminer les espérances et les écarts -type données dans le tableau 4.1 : Les corrélations entre ces variables étant $\rho_{X_1X_2} = 0.49$, $\rho_{X_1X_3} = 0.07$

TABLE 4.1 –

i	1	2	3
μ_{X_i}	174	4.41	21.1
σ_{X_i}	6.5	0.15	5

et $\rho_{X_2X_3} = 0.49$. On suppose que $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ forme un vecteur aléatoire normal.

1. Quelle est la corrélation entre la taille et le poids lorsque le pourcentage de graisse est fixé ?

2. Quelle est la corrélation entre la taille et le pourcentage de graisse lorsque le poids est fixé ?
3. La variable X_3 est laborieuse à mesurer, en envisage de la prédire sur base de x_1 et x_2 faciles à obtenir. Quelle sera la valeur attendue pour X_3 si l'on sait que $X_1 = x_1$ et $X_2 = x_2$?
4. Quel est la distribution du pourcentage de graisse chez un individu qui mesure 180 centimètre et pèse 68 Kilogrammes ?

Solution.

$$\Sigma_{a/b} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba} = \begin{pmatrix} 42 & 0.436 \\ 0.436 & 0.0141 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\rho_{X_1,X_2/X_3} = \frac{0.436}{\sqrt{(42)(0.0141)}} = 0.57$$

c'est le coefficient de corrélation entre la taille et le poids conditionnellement au pourcentage de graisse.

En posant $X_a = (X_1, X_3)^t$ *et* $X_b = X_2$,

$$\Sigma_{aa} = \begin{pmatrix} 42.3 & 2.28 \\ 2.28 & 25 \end{pmatrix}; \Sigma_{ab} = 0.0225; \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}^t = \begin{pmatrix} 0.478 \\ 0.458 \end{pmatrix}.$$

et l'on obtient :

$$\Sigma_{a/b} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba} = \begin{pmatrix} 32.1 & -7.44 \\ -7.44 & 46.7 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\rho_{X_1,X_3/x_2} = \frac{-7.44}{\sqrt{(32.1)(46.7)}} = -0.53$$

c'est le coefficient de corrélation entre la taille et le pourcentage de graisse conditionnellement au poids

En posant $X_a = (X_1, X_2)^t$ *et* $X_b = X_3$, *on peut écrire*

$$\begin{aligned} \mu_{b/a} &= = 21.1 + (2.28, 0.458) \begin{pmatrix} 42.3 & 0.478 \\ 0.478 & 0.0225 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.41 \\ 174 \end{pmatrix} \right) \\ &= -0.232x_1 + 25.3x_2 - 49.9. \end{aligned}$$

En posant $x_1 = 180$ *et* $x_2 = ln(68)$ *dans la formule précédente, on obtient :*

$$\mu_{b/a} = (-0.232)(180) + (25.3)ln(68) - 49.9 = 150.9$$

Soit un pourcentage moyen $\mu_{X_3/(x_1,x_2)}$ *en graisse inférieur à la moyenne* μ_{X_3}. *La variance quant à elle ne dépend ni de* x_1 *ni de* x_2 *et est donnée par :*

$$\Sigma_{b/a} = \Sigma_{bb} - \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab} = 14$$

soit une valeur pour $\sigma^2_{X_3/(x_1,x_2)}$ inférieure à la valeur $\sigma^2_{X_3}$, ce qui traduit la réduction de l'incertitude sur X_3 obtenue en utilisant l'information donnée par x_1 et x_2. On a donc $X_3\diagup(180, ln(68)) \sim \mathcal{N}(15.09, 14)$ sous l'hpothèse du vecteur gaussien.

1. $X = (X_1, X_2, X_3)^t \sim \mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$, avec :

$$\mu = \begin{pmatrix} 174 \\ 4.41 \\ 21.1 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 6.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 1 & 0.49 & 0.07 \\ 0.49 & 1 & 0.61 \\ 0.07 & 0.61 & 1 \end{pmatrix}$$

   ce qui donne :

$$\Sigma_X = SRS = \begin{pmatrix} 42.3 & 0.478 & 2.28 \\ 0.478 & 0.0225 & 0.0458 \\ 2.28 & 0.0458 & 25 \end{pmatrix}.$$

   En posant $X_a = (X_1, X_2)$ et $X_b = X_3$, on peut écrire

$$\Sigma_{aa} = \begin{pmatrix} 42.3 & 0.478 \\ 0.478 & 0.0225 \end{pmatrix}; \Sigma_{bb} = 25; \Sigma_{ba} = \Sigma_{ab} = \begin{pmatrix} 2.28 \\ 0.458 \end{pmatrix}$$

   et l'on obtient :

$$\Sigma_{a/b} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba} = \begin{pmatrix} 42 & 0.436 \\ 0.436 & 0.0141 \end{pmatrix}.$$

   Soit :

$$\rho_{X_1,X_2/X_3} = \frac{0.436}{\sqrt{(42)(0.0141)}} = 0.57$$

   c'est le coefficient de corrélation entre la taille et le poids conditionnellement au pourcentage de graisse.

2. En posant $X_a = (X_1, X_3)^t$ et $X_b = X_2$,

$$\Sigma_{aa} = \begin{pmatrix} 42.3 & 2.28 \\ 2.28 & 25 \end{pmatrix}; \Sigma_{ab} = 0.0225; \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}^t = \begin{pmatrix} 0.478 \\ 0.458 \end{pmatrix}.$$

   et l'on obtient :

$$\Sigma_{a/b} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba} = \begin{pmatrix} 32.1 & -7.44 \\ -7.44 & 46.7 \end{pmatrix}$$

   soit :

$$\rho_{X_1,X_3/x_2} = \frac{-7.44}{\sqrt{(32.1)(46.7)}} = -0.53$$

   c'est le coefficient de corrélation entre la taille et le pourcentage de graisse conditionnellement au poids

3. En posant $X_a = (X_1, X_2)^t$ et $X_b = X_3$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mu_{b/a} &= = 21.1 + (2.28, 0.458)\begin{pmatrix} 42.3 & 0.478 \\ 0.478 & 0.0225 \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.41 \\ 174 \end{pmatrix}\right) \\ &= -0.232x_1 + 25.3x_2 - 49.9. \end{aligned}$$

4. En posant $x_1 = 180$ et $x_2 = ln(68)$ dans la formule précédente, on obtient :

$$\mu_{b/a} = (-0.232)(180) + (25.3)ln(68) - 49.9 = 150.9$$

Soit un pourcentage moyen $\mu_{X_3/(x_1,x_2)}$ en graisse inférieur à la moyenne μ_{X_3}. La variance quant à elle ne dépend ni de x_1 ni de x_2 et est donnée par :

$$\Sigma_{b\diagup a} = \Sigma_{bb} - \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab} = 14$$

soit une valeur pour $\sigma^2_{X_3/(x_1,x_2)}$ inférieure à la valeur $\sigma^2_{X_3}$, ce qui traduit la réduction de l'incertitude sur X_3 obtenue en utilisant l'information donnée par x_1 et x_2. On a donc $X_3\diagup(180, ln(68)) \sim \mathcal{N}\,(15.09, 14)$ sous l'hpothèse du vecteur gaussien.

4.3 Indépendance

Pour un vecteur normal, l'indépendance entre variables est équivalente à l'absence de corrélation entre ces variables.

Théorème 4.3.1. Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$: Pour que ses composantes $X_1, ..., X_n$ soient indépendantes, il faut et il suffit que la matrice de covariance soit diagonale.

Démonstration. Il suffit, bien sûr, de montrer la réciproque. Supposons donc que Σ_X soit diagonale, i.e.

$$\Sigma_X = S^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma^2_{X_2} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix}.$$

Comme X est un vecteur gaussien de loi $N\,(\mu, \Sigma)$, chacune de ses composantes X_j , pour $j = 1, ..., n$ est de loi normale $N\left(\mu_j, \sigma_j^2\right)$ et de fonction caractéristique :

$$\phi_{X_j}(\lambda_j) = \exp\left[i\lambda_j\mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2\lambda_j^2\right], \lambda_j \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Par ailleurs, la fonction caractéristique du vecteur X est, pour tout λ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\phi_X(\lambda) &= \exp\left[i\lambda'\mu - \frac{1}{2}\lambda'\Sigma_X\lambda\right] \\ &= \exp\left[i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\sigma_j^2\right] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{n}\left(i\lambda_j\mu_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2\sigma_j^2\right)\right] \\ &= \prod_{j=1}^{n}\exp\left[i\lambda_j\mu_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2\sigma_j^2\right] = \prod_{j=1}^{n}\phi_{X_j}(\lambda_j).\end{aligned}$$

Proposition 4.3.2. *[3].*

- $X_1 \perp ... \perp X_{n_a} \diagup x_b \Leftrightarrow \Sigma_{a\diagup b} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1\diagup x_b} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma^2_{X_2\diagup x_b} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \sigma^2_{X_{n_a}\diagup x_b} \end{pmatrix}$
- $X_a \perp X_b \Leftrightarrow \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}^t$.

  Si $X = (X_a, X_b)^t \sim N(\mu_X, \Sigma_X)$ avec $\Sigma_X = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix}$, alors

- $X_1 \perp ... \perp X_{n_a} \Leftrightarrow \Sigma_{aa} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma^2_{X_2} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \sigma^2_{X_{n_a}} \end{pmatrix}$
- $X_1 \perp ... \perp X_{n_a} \diagup x_b \Leftrightarrow \Sigma_{a\diagup b} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1\diagup x_b} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma^2_{X_2\diagup x_b} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \sigma^2_{X_{n_a}\diagup x_b} \end{pmatrix}$
- $X_a \perp X_b \Leftrightarrow \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}^t$.

Exemple 4.3.1. *Soit* $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ *un vecteur gaussien de matrice de covariance*

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que X_1 et $X_2 - X_3$ sont indépendants.
Solution. *Le vecteur $Y = (X_1, X_2 - X_3)^t$ est un vecteur gaussien, car*

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X.$$

De plus

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_2) &= Cov(X_1, X_2 - X_3) = Cov(X_1 X_2) - Cov(X_1, X_3) \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $Y_1 = X_1$ et $Y_2 = X_2 - X_3$ sont indépendants.

4.3.1 Transformation linéaire d'un vecteur gaussien

Proposition 4.3.3. *La transformée d'un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ par une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ est encore un vecteur gaussien.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \phi_Y(\lambda) &= \phi_{AX}(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{i<\lambda, AX>}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i<A'\lambda, X>}\right) \\ &= \phi_X(A^t\lambda) = \exp\left[i\lambda^t A\lambda - \frac{1}{2}\lambda^t A \sum_X A^t\lambda\right]. \end{aligned}$$

Par caractérisation, le vecteur Y est donc un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^p$ de vecteur des espérances $A\mu$ et de matrice de covariance $A\Sigma_X A^t$, i.e.

$$Y \sim \mathcal{N}\left(A\mu_X, A\Sigma_X A^t\right).$$

Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$, de vecteur des espérances μ et de matrice de covariance Σ_X. Soit A la matrice associée à une transformation linéaire quelconque de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$. La matrice A est donc de dimension $p \times n$. Calculons la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $Y = AX$. D'après ce que l'on a vu au chapitre précédent, pour tout λ de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$\begin{aligned} \phi_Y(\lambda) &= \phi_{AX}(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{i<\lambda, AX>}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i<A'\lambda, X>}\right) \\ &= \phi_X(A^t\lambda) = \exp\left[i\lambda^t A\lambda - \frac{1}{2}\lambda^t A \sum_X A^t\lambda\right]. \end{aligned}$$

Par caractérisation, le vecteur Y est donc un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^p$ de vecteur des espérances $A\mu$ et de matrice de covariance $A\Sigma_X A^t$, i.e.

$$Y \sim \mathcal{N}\left(A\mu_X, A\Sigma_X A^t\right).$$