Correction de l'interrogation

Exo1 : 03 pts

1) On a $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy =$

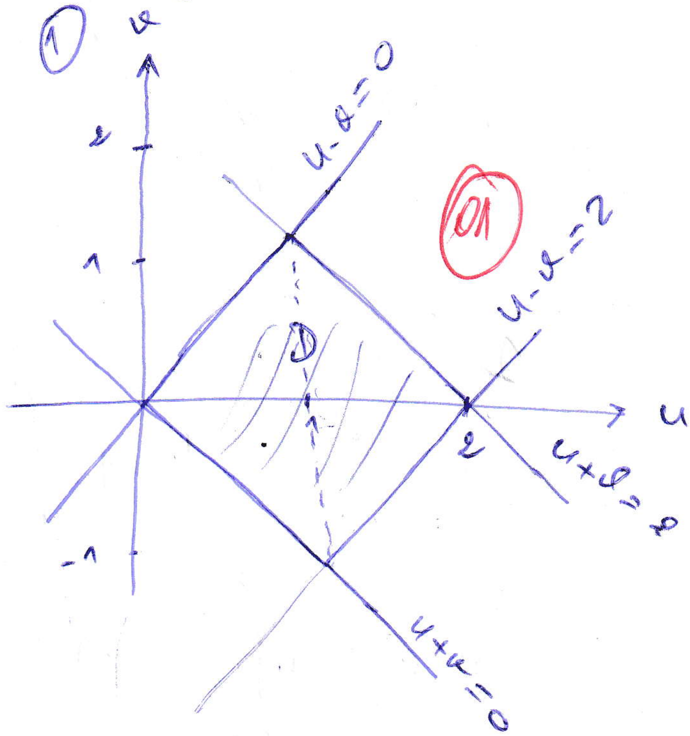
$$= \int_0^1 \left[\int_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\right]dx + \int_1^2 \left[\int_{x-2}^{2-x} f(x,y)\,dy\right]dx$$

01

$$= \frac12\int_0^1 y\Big|_{-x}^{x}\,dx + \frac12\int_1^2 y\Big|_{x-2}^{2-x}\,dx$$

$$= \frac12\int_0^1 2x\,dx + \frac12\int_1^2 4\,dx = \frac12(2-x)\Big|_0^1 + \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac12 + \frac12 = 1.$$

①



2) On a $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv.$

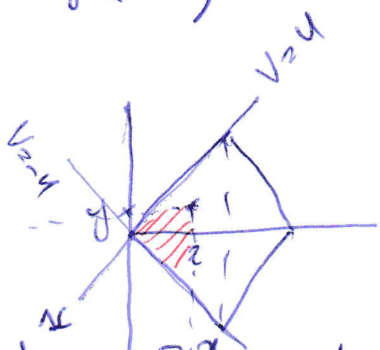
Si $x<0$ ou $y<-1$ ou $0\le x<1$ et $-1\le y<-x$.

ou ($x<0$ ou $u+v<0$ ou $y<-1$)

$F(x,y)=0$

Si $0\le x<1$ et $-x\le y\le x$

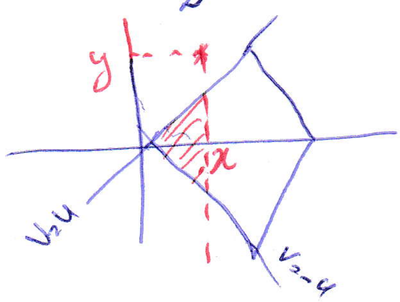
01



$$F(x,y) = \int_0^x \left[\int_{-u}^{y} \frac12\,dv\right]du$$

$$= \frac12\int_0^x [v]_{-u}^{y}\,du = \frac12\int_0^x (y+u)\,du = \frac{u^2}{4}\Big|_0^x + \frac{yu}{2}\Big]_0^x = \frac12\left(\frac{x^2}{2}+xy\right).$$

Si $0\le x<1$ et $y>x$

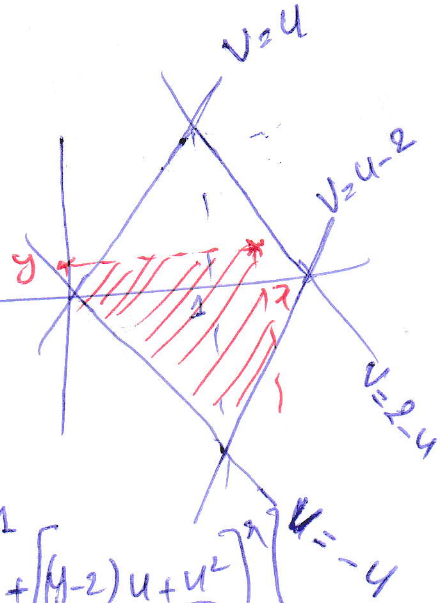


01

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x \left[\int_{-u}^{u} dv\right] du = \frac{1}{2}\int_0^x [v]_{-u}^{u}\, du = \frac{1}{2}\int_0^x (2u)\, du$$

$$= \left.\frac{u^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Si $1 \leq x < 2$, $x-2 \leq y < 2-x$.



$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left[\int_{-u}^{y} dv\right] du + \int_1^x \left[\int_{2-u}^{y} dv\right] du\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (y+u)\, du + \int_1^x (y+u-2)\, du\right] = \frac{1}{2}\left\{\left[yu + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 + \left[(y-2)u + \frac{u^2}{2}\right]_1^x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(y+\frac{1}{2}\right) + (y-2)x + \frac{x^2}{2} - y - 2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}(y-2)x - 1.$$

Si $1 \leq x < 2$

$y \geq 2-x$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 \left[\int_{-u}^{y} dv\right] du + \int_1^x \left(\int_{2-u}^{u-2} dv\right) du\right.$$

Exo2 3,5pts

1) $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\dots\}$ 0,5

$\text{card } X(\Omega) \times Y(\Omega) = 3 \times 4 = 12$.

X \ Y	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$
1	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
2	0,04	0,02	0,08	0,06	0,2
3	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
$P_{\cdot j}$	0,2	0,1	0,4	0,3	1

2) On a $\sum_{\substack{i=1,3 \\ j=1,4}} P_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 0{,}08 + 0{,}04 + \dots + 0{,}3 = 1$. 0,5

donc cette loi définie une loi de probabilité.

3) On donne quelque exemple de la fonction de répartition $F(x,y)$

On a $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ 01

si $x, y < 1$ $\quad F(x,y) = 0$

si $1 \leq x < 2$ et $1 \leq y < 2$ $\quad F(x,y) = P_{11} = 0{,}08$

si $1 \leq x < 2$, $2 \leq y < 3$ $\quad F(x,y) = P_{11} + P_{12} = 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}12$

si $2 \leq x < 3$, $1 \leq y < 2$ $\quad F(x,y) = P_{11} + P_{21} = 0{,}04 = 0{,}04 = 0{,}12$

$F(x,y) = P_{11} + P_{12} + P_{21} = 0{,}08 + 0{,}04 + 0{,}04 = 0{,}16$.

si $2 \leq x < 3$, $2 \leq y < 3$

4) La loi de la variable X est définie par les probabilités $P_{i\cdot}$ 0,5

et pour la variable Y sont les $P_{\cdot j}$ qui ~~sont~~ présentant dans le tableau précédent. 0,5

* Pour l'indépendance on donne aussi quelque exemple:

$P_{11} = 0{,}08 = 0{,}4 \times 0{,}8 = P_{1\cdot} \times P_{\cdot 1}$ 0,5

$P_{12} = 0{,}04 = 0{,}4 \times 0{,}1 = P_{1.} P_{.2}$

$P_{23} = 0{,}08 = 0{,}2 \times 0{,}08 = P_{2.} P_{.3}$

$\Rightarrow$ X, Y sont indépendantes