Conditions KUHN - TUCKER

1) Introduction

Nous avons examiné la méthode de Lagrange utilisée pour l'optimisation avec des contraintes égalités.

Kuhn et Tucker ont généralisé la méthode de Lagrange pour les méthodes d'optimisation avec contraintes sous forme d'inégalités et d'égalités. Cette méthode est très importante pour les problèmes d'optimisations non linéaires. Ces problèmes sont formulés de la manière suivante :

Min $f(x)$

Sous les contraintes

$$g_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots, J$$

$$h_k(x) = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots, K$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Kuhn et Tucker ont établis les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les problèmes d'optimisation non linéaires en partant du postulat que les fonctions f , g_j et h_k sont différentiables. Ces conditions sont connus sous le nom de conditions d'optimalité **Kuhn et Tucker**. Elles sont formulées de façon à résoudre un système d'inéquations et d'équations linéaires.

2) Problème à résoudre

Trouver les vecteurs $x(N \times 1)$, $\mu(1 \times J)$, $\lambda(1 \times K)$ satisfaisants les conditions suivantes :

$$\nabla f(x) - \sum_{j=1}^J \mu_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^K \lambda_k \nabla h_k(x) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Valeurs pour la minimisation } g_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (2)$$

Pour la maximisation $g_j \leq 0$

$$h_k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots, K \quad (3)$$

$$\mu_j g_j(x) = 0 \quad (4)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad (5)$$

Exemple

Le minimum de la fonction $f(x)$

$$\text{Min } f(x) = x_1^2 - x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - 1 \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 26 \end{cases}$$

Solution

Ecrivons ce problème sous forme de problème d'optimisation non linéaire

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \quad ; \quad \nabla f(x) = (2x_1; -1)$$

$$g_1 = x_1 - 1 \geq 0$$

(doit être écrite $\geq$) $g_2 = -x_1^2 - x_2^2 + 26 \geq 0$

$$h_1(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0$$

Je dois calculer les gradients

$$\nabla g_1(x) = (1; 0)$$

$$\nabla g_2(x) = (-2x_1; -2x_2)$$

$$\nabla h_1(x) = (1; 1)$$

L'équation (1) qui fait partie des conditions de Kuhn – Tucker prend la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} - \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2$$

On développe :

$$j = 1 : \frac{\partial f}{\partial x_1} - \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = 0$$

$$j = 2 : \frac{\partial f}{\partial x_2} - \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0$$

On aura :

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - \mu_1 - \mu_2(-2x_1) - \lambda_1 = 0 \\ -1 - \mu_2(-2x_2) - \lambda_1 = 0 \end{bmatrix}$$

L'inéquation (2) et l'équation (3) s'écrivent :

$$g_1 = x_1 - 1 \geq 0$$

$$g_2 = -x_1^2 - x_2^2 + 26 \geq 0$$

$$h_1 = x_1 + x_2 - 6 = 0$$

L'équation (4) de Kuhn – Tucker prend la forme :

$$\mu_1 g_1(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_1(x_1 - 1) = 0$$

$$\mu_2 g_2(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_2(-x_1^2 - x_2^2 + 26) = 0$$

La dernière condition s'exprimera par : $\mu_1 \geq 0$ et $\mu_2 \geq 0$

Remarquons qu'on impose des conditions de non négativité pour μ_1 et μ_2 et aucune condition de signe sur λ_1

Ainsi, pour cet exemple les conditions de Kuhn – Tucker s'écrivent sous la forme :

$$2x_1 - \mu_1 + 2\mu_2 * x_1 - \lambda_1 = 0 \quad (1)$$

$$-1 + \mu_2 * 2x_2 - \lambda_1 = 0 \quad (2)$$

$$x_1 - 1 \geq 0 \quad (3)$$

$$26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 - 6 = 0 \quad (5)$$

$$\mu_1(x_1 - 1) = 0 \quad (6)$$

$$\mu_2(26 - x_1^2 - x_2^2) \quad (7)$$

$$\mu_1 \geq 0 \quad ; \quad \mu_2 \geq 0 \quad (8)$$

Remarquons que les valeurs $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$ peuvent satisfaire les contraintes (3), (4) et (5), donc, les contraintes (1) et (2) deviennent :

$$2 - \mu_1 + 2\mu_2 - \lambda_1 = 0$$

$$-1 + 10\mu_2 - \lambda_1 = 0$$

En posant $\lambda_1 = 0$ on obtient $\mu_1 = 2,2$ et $\mu_2 = 0,1$

Ainsi, la solution est : $x^* = (1, 5)$ et $\mu^* = (2,2 ; 0,1)$ et $\lambda_1^* = 0$

La solution satisfait les conditions de Kuhn- Tucker donc, $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$ est une solution de problème.

Remarquons qu'il peut exister d'autres valeurs de μ_1, μ_2 et λ_1 pouvant satisfaire les conditions du système (1) à (8)

Exercice

$$\text{Max} f(x) = \frac{40x_1}{10 + x_1} + \frac{80x_2}{5 + x_2} - x_1 - x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solution

Pour Max $f(x)$

$$g_i(x) \leq 0 \quad ; \quad h_k(x) = 0$$

Nous avons les conditions de Kuhn-Tucker

$$\nabla f(x) - \sum_{j=1}^J \mu_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^K \lambda_k \nabla h_k(x) = 0$$

La différence est ici $g_j(x) \leq 0$

$$h_k(x) = 0$$

$$\mu_j g_j(x) = 0$$

$$\mu_j \geq 0$$