Chapitre 3 :

Multiplicateur de Lagrange

3.1 Introduction

Nous avons vue auparavant les conditions d'optimalités dans le cas des problèmes d'optimisation sans contraintes. On rencontre souvent en pratique les problèmes d'optimisation avec contraintes ces dernières diminuent considérablement le domaine des solutions possibles. A la première vue, on peut penser que cette diminution du domaine des solutions permettant de simplifier la procédure de recherche de l'optimum. Cependant au contraire le processus d'optimisation devient plus compliqué, et les conditions d'optimalité utilisées précédemment (optimisation sans contrainte) ne peuvent être utilisé en présence des contraintes ainsi, la condition d'existence de l'optimum au point stationnaire caractérisé par le gradient nul (seule) n'est plus valable.

Exemple

Le minimum de la fonction $f(x) = (x-2)^2$ se situe au point stationnaire x = 2 si on ajoute la contrainte $x \geq 4$ nous devons trouver un optimum conditionné au point x = 4 ce point n'est pas stationnaire puisque $f'(4) = +4$ (1ier dérivée $\neq 0$)

3.2 Problème d'optimisation avec contrainte égalité

Considérons le problème d'optimisation possédant des contraintes égalité Min $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous les contraintes $h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ où (k) = 1, 2, 3, …, k

Ce problème peut être en principe résolu comme un problème sans contrainte en éliminant de la fonction objectif les variables indépendantes à l'aide des égalités donnés. L'existence des contraintes égalités permet de réduire la diminution du problème de n à n – k variables.

Exemple

Min $f(x) = x_1 * x_2 * x_3$ contrainte $h_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ $\quad x_3 = 1 - x_1 - x_2$

En éliminant la variable x_3 à l'aide de l'équation $h_1(x) = 0$. On obtient un problème d'optimisation à deux variables sans contraintes : **Min** $f(x) = x_1 * x_2 * (1 - x_1 - x_2)$

Cette méthode d'élimination des variables est valable seulement lorsque l'équation de la contrainte peut être résolue par rapport aux variables. Si on est en présence d'un nombre important de contraintes sous forme d'égalité, le processus d'élimination des variables devient compliqués une autre situation peut se présenter lorsqu'il n'est pas possible de résoudre l'équation par rapport à une variable. Par exemple si la contrainte $h_1(x) = 0$ est de la forme : $h_1(x) = x_1^2\, x_3 + x_2\, x_3^2 + x_2\, x_1 = 0$

L'obtention des expressions analytiques de l'une des variables par rapport aux autres n'est pas facile. Ainsi la résolution des problèmes contenant des expressions complexes des contraintes sous formes d'égalités, il est commande d'utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange.

3.3 Enoncé du multiplicateur de Lagrange

A l'aide de cette méthode, on peut poser les conditions d'optimalité permettant d'identifier les points optimaux des problèmes d'optimisation avec contraintes. Ainsi, les problèmes est transformé en un problème équivalent d'optimisation sans contraintes où apparaissent des paramètres appelés multiplicateurs de Lagrange.

Considérons le problème d'optimisation d'une fonction à n variables avec une seule contrainte d'égalité :

Min $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **(1)**

Sous contraintes :

$h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **(2)**

en conformité avec la méthode du multiplicateur de Lagrange, ce problème est ramené à un problème sans contraintes sous la forme :

Min $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda h_1(x)$ **(3)**

La fonction $L(x, \lambda)$ est dite fonction de Lagrange ou bien le Lagrangien du problème d'optimisation.

λ : est appelé multiplicateur de Lagrange (constant)

si pour une valeur $\lambda = \lambda^*$, le minimum est atteint au point $x = x^*$ et x^* satisfait l'équation $h_1(x^*) = 0$, donc x* minimise la fonction (1) en tenant compte de l'équation (2) et **Min** $L(x, \lambda)$ = **Min** $f(x)$. Donc, il est évident que la valeur $\lambda = \lambda^*$ est prise de telle sorte que le point $x = x^*$ satisfait l'équation (2). Cela est possible si λ est considéré comme variable et on cherche le Lin de la fonction (3) considéré en fonction de λ . Par la suite trouver la valeur de λ pour laquelle l'équation (2) est satisfaite.

Exemple

Min $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ **(1)**

Sous contraintes :

$h_1(x) = 2x_1 + x_2 - 2 = 0$ **(2)**

Solution

en utilisant la méthode de Lagrange, on pourra passer à un problème d'optimisation sans contraintes sous la forme suivante

Min $L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 2)$ **(3)**

On calcule les dérivées partielles de (L) par rapport à x_1 **et** x_2 (calcul du gradient de L)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda$$

On pose en suite ces deux composantes égale à zéro

$$2x_1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow x_1^0 = \lambda$$
$$2x_2 - \lambda = 0 \Rightarrow x_2^0 = \lambda/2$$

Afin de vérifier si le point stationnaire x^0 correspond au minimum, on calcule les éléments de la matrice Hessienne de la fonction $L(x, \lambda)$ comme fonction de x

$$H_L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est positivement déterminée, cela signifie que $L(x, \lambda)$ est une fonction convexe en **(x)** par conséquent, les coordonnées $x_1^0 = \lambda$ et $x_2^0 = \frac{\lambda}{2}$ donnent le minimum globale.

Pour trouver le optimal, λ^0 on remplace dans (2)

$$h_1(\lambda^0) = 2\lambda^0 + \frac{\lambda^0}{2} - 2 = 0$$
$$h_1(\lambda^0) = \lambda^0(2 + \frac{1}{2}) - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^0 = \frac{4}{5}$$

Ainsi, le minimum est atteint pour : $x_1^* = 4/5$ $\quad x_2^* = 2/5$

Donc,

$$Minf(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être élargie pour le cas de plusieurs contraintes d'égalité.
Considérons le problème suivant :

Min f(x) = sous contraintes $H_K(x) = 0$, k = 1,2, …, k

Donc, la fonction de Lagrange prendra la forme :

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$: Sont les multiplicateurs de Lagrange c'est-à-dire des paramètres à déterminer.

En égalisant les dérivées partielles de **L** par rapport à **x** à zéro, on obtiendra un système de **n** équations pour n inconnus.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} \end{cases}$$

Si la solution de ce système en fonction de λ difficile, il est possible de résoudre en utilisant dans ce système les contraintes d'égalité :

$$\begin{cases} h_1(x) = 0 \\ h_2(x) = 0 \\ \vdots \\ h_k(x) = 0 \end{cases}$$

La solution du système élargie composé de **N + k** équations avec N + k inconnu détermine le point stationnaire de la fonction **(L)**. En suite, on passe à la vérification de l'existence du Min ou du Max en calculent les éléments de la matrice Hessiènne de **(L)** en fonction de x de la même manière que dans le cas d'une seule contrainte d'égalité.

Remarque
Il existe des cas où le multiplicateur de Lagrange n'est pas applicable et la solution peut ne pas exister (ce genre de situation est assez rare.)