ESPACES METRIQUES

Prof. N. Merazga

26 décembre 2024

Table des matières

Ce chapitre constitue une introduction aux espaces métriques, lesquels sont des espaces topologiques particulièrement importants.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Distances, boules

Définition 1 (Distance, espace métrique) *Soit X un ensemble non vide. Une distance ou métrique sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in X$:*

(D1) $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$, [Séparation]

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$, [Symétrie]

(D3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, [Inégalité triangulaire].

Muni de la distance d, l'ensemble X est appelé <u>espace métrique</u> et est noté (X,d).

Exemple 1 Sur un ensemble non vide X,

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x=y\\ 1 & \text{si } x\neq y\end{cases}$$

est une distance dite *discrète* ou *triviale*, et (X,d) est appelé *espace métrique discret*.

Exemple 2 Sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $d:\mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x,y)=|x-y|$$

est une distance appelée *distance usuelle* ou *naturelle* de $\mathbb{K}$.

Exemple 3 Sur l'espace $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on définit, en notant $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{K}^n$, les distances principales suivantes :

$$\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\,, \\
d_2(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} && \text{(distance euclidienne)}\\
d_p(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}\,,\ p\geq 1 && \text{(distance höldérienne d'ordre } p\text{)}\\
d_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|\,.
\end{aligned}$$

Pour $n=1$, on a $d_1=d_2=d_p=d_\infty$.
L'inégalité triangulaire pour d_p découle de l'inégalité classique (1) appelée *inégalité de Minkowski*.

Théorème 1 (Inégalité de Minkowski, version discrète) *Soit $p\in[1,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, pour tous $a_i,b_i\in\mathbb{K}$, $i=1,...,n$, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Exemple 4 Considérons l'ensemble $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ des applications réelles bornées sur un ensemble X. On rappelle que

$$\begin{aligned}
f:X\to\mathbb{R}\ \textit{est bornée} &\iff f(X)\ \textit{est une partie bornée de}\ \mathbb{R}\\
&\iff \exists C>0\ \textit{tel que}\ |f(x)|\leq C\ \textit{pour tout}\ x\in X.
\end{aligned}$$

Sur l'ensemble $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, on définit la distance

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|\,.$$

Exemple 5 Sur l'ensemble $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ continue}\}$, on définit les distances principales suivantes en posant pour $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
d_1(f,g) &= \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \\
d_2(f,g) &= \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2\, dt} \\
d_\infty(f,g) &= \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| \qquad \text{[distance de la convergence uniforme]} \\
d_p(f,g) &= \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \ p \geq 1.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire pour d_p se réduit à l'inégalité de Minkowski pour les intégrales.

Théorème 2 (Inégalité de Minkowski, version continue) *Si $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in C([a,b], \mathbb{K})$, alors*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Proposition 1 *Pour tous points x, y et z d'un espace métrique (X, d), on a*

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y). \tag{3}$$

Définition 2 (Distance induite, sous-espace métrique) *Si (X,d) est un espace métrique et A une partie non vide de X, la restriction d_A de d à $A \times A$ est une distance sur A. L'espace métrique (A, d_A) est dit sous-espace métrique de (X,d).*

Définition 3 (Espace métrique produit) *Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On définit sur l'ensemble produit $X_1 \times X_2$ les distances principales suivantes en posant pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$:*

$$\begin{aligned}
D_1(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \\
D_2(x,y) &= \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2} \\
D_p(x,y) &= \left[(d_1(x_1,y_1))^p + (d_2(x_2,y_2))^p\right]^{1/p}, \qquad p \geq 1 \\
D_\infty(x,y) &= \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}
\end{aligned}$$

Muni de l'une des distances ci-dessus, $X_1 \times X_2$ est appelé espace métrique produit.

Définition 4 (Boule et sphère) *Soit (X,d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On définit :*

- *Boule ouverte :* $B(a,r) = \{x \in X \ ; \ d(a,x) < r\}$
- *Boule fermée :* $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \ ; \ d(a,x) \leq r\}$
- *Sphère :* $S(a,r) = \{x \in X \ ; \ d(a,x) = r\}$

Dans les trois cas, a est appelé <u>le centre</u> et r <u>le rayon</u>.

Comme conséquences directes de la définition ci-dessus, on a :

Remarque 1 Pour tout $a \in X$ et tous réels strictement positifs r et r', on a :

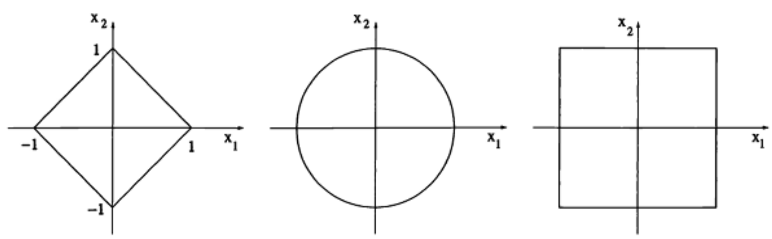
i) $S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r)$,

ii) $r < r' \implies B(a,r) \subset \overline{B}(a,r) \subset B(a,r')$.

Exemple 6 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$, on a pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

$$B(a,r) =]a-r, a+r[, \quad \overline{B}(a,r) = [a-r, a+r] \quad \text{et} \quad S(a,r) = \{a-r, a+r\}$$

Exemple 7 Dans $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes (resp. fermées) de centre 0 de rayon 1 ont les formes suivantes pour les distances d_1, d_2 et d_∞ (resp. y compris les frontières) :

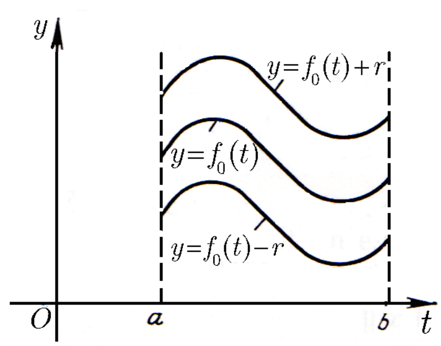


Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$d_2(x,0) \leq 1 \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \iff x_1^2 + x_2^2 \leq 1,$$

$$d_\infty(x,0) \leq 1 \iff \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1 \iff (|x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1) \iff \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ -1 \leq x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Exemple 8 Dans $C([a,b],\mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞, la boule $B(f_0, r)$ de centre f_0 et de rayon r est l'ensemble des applications $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ dont les courbes sont situées strictement entre celles des applications $f_0 - r$ et $f_0 + r$.



Exemple 9 Dans un espace métrique discret (X,d), on a pour tout $a \in X$:

– si $r < 1$: $\quad B(a,r) = \overline{B}(a,r) = \{a\}$ et donc $S(a,r) = \varnothing$;
– si $r = 1$: $\quad B(a,r) = \{a\}$, $\overline{B}(a,r) = X$ et donc $S(a,r) = X \setminus \{a\}$;
– si $r > 1$: $\quad B(a,r) = \overline{B}(a,r) = X$ et donc $S(a,r) = \varnothing$.

Définition 5 *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X.*

– *On appelle distance d'un point x à A, le nombre positif ou nul*

$$d(x, A) = \inf \{d(x,y) \ ; \ y \in A\} .$$

– *On appelle diamètre de A et on note* $\operatorname{diam}(A)$, *la quantité positive ou égale à $+\infty$* :

$$\operatorname{diam} A = \sup \{d(x,y) \ ; \ x, y \in A\} .$$

– *Une partie A de X est dite bornée si son diamètre est fini.*

Exemple 10 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a

$$d(0,]1,3[) = \inf_{1<x<3} x = 1, \qquad \operatorname{diam}(]1,3[) = \sup_{1<x,y<3} |x-y| = 2.$$

On vérifie immédiatement que

Proposition 2 *Une partie non vide A de X est bornée si et seulement si il existe une boule contenant A.*

Preuve. Supposons A bornée, donc $\operatorname{diam} A < +\infty$. Soit a un point arbitraire de A, alors $A \subset \overline{B}(a, \operatorname{diam} A)$ car $\forall x \in A : \ d(a,x) \leq \operatorname{diam} A$.

Inversement, supposons $A \subset B(a,r)$. Pour $x, y \in A$, on a :

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < 2r$$

d'où,

$$\operatorname{diam} A = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y) \leq 2r < +\infty,$$

d'où la bornitude de A. ∎

Proposition 3 *Soit (X, d) un espace métrique et soit A et B deux parties non vides de X. On a :*

– $\forall x, y \in X, \ |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.
– $\operatorname{diam} A = 0 \iff$ *A est réduit à un point.*
– $A \subset B \implies \operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.
– *A et B bornées $\implies$ $A \cup B$ bornée (la réunion de deux parties bornées est bornée).*
– *Toute partie finie de X est bornée.*

Définition 6 *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Une application $f : X \to Y$ est dite bornée si son image $f(X)$ est bornée dans (Y, d).*

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des applications $f : X \to Y$ bornées. La formule

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

définit une distance sur $\mathcal{B}(X, Y)$, appelée distance de la convergence uniforme.

2 Topologie d'un espace métrique

Proposition 4 *Soit (X,d) un espace métrique. La famille τ des parties $\mathcal{O}$ de X qui vérifient la propriété :*

$$\forall x \in \mathcal{O},\ \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x,r) \subset \mathcal{O},$$

est une topologie sur X, appelée topologie associée à la distance d.

Preuve. Il suffit de vérifier que τ satisfait les trois propriétés d'une topologie, i.e.

(O1) X et $\varnothing$ sont des éléments de τ ;

(O2) Une union quelconque d'éléments de τ est un élément de τ ;

(O3) Une intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ.

■

Remarque 2 La topologie associée à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ n'est rien d'autre que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Proposition 5 *Dans un espace métrique (X,d),*
- *toute boule ouverte est un ouvert ;*
- *toute boule fermée est un fermé ;*
- *toute sphère est un fermé.*

Proposition 6 *Dans un espace métrique (X,d), une partie est ouverte si et seulement si elle est réunion de boules ouvertes.*
Autrement dit, la famille des boules ouvertes est une base d'ouverts de la topologie associée à la distance d.

Preuve. D'après la proposition précédente, une réunion de boules ouvertes est un ouvert de (X,d). Réciproquement, soit $\mathcal{O}$ un ouvert de (X,d) ; pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x,r_x) \subset \mathcal{O}$. Par suite, $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{x\in\mathcal{O}} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x\in\mathcal{O}} B(x,r_x) \subset \mathcal{O}$. ■

Proposition 7 (Caractérisation d'un voisinage d'un point) *Soit (X,d) un espace métrique, V une partie de X et x un point de X. Alors,*

$$V \in \mathcal{V}(x) \iff \exists\, \varepsilon > 0 : \quad B(x,\varepsilon) \subset V.$$

Remarque 3 Cette proposition signifie que la famille $\{B(x,\varepsilon)\ ;\ \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinages du point x.

Proposition 8 *Un espace métrique est séparé.*

Preuve. Soit (X, d) un espace métrique et soit x, y deux points distincts de X. On pose $r = d(x, y)$, alors les boules $B\left(x, \frac{r}{3}\right)$ et $B\left(y, \frac{r}{3}\right)$ sont dse voisinages disjoints de x et y respectivement. ■

Corollaire 1 *Toute partie finie d'un espace métrique est fermée.*

Proposition 9 *Un espace métrique (X, d) est normal.*

Proposition 10 (Point intérieur, point adhérent, point d'accumulation) *Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X et x un point de X.*

- *x est un point intérieur à A si et seulement si :*

$$\exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset A.$$

- *x est un point adhérent à A si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$

  i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A \quad \text{tel que} \quad d(x, y) < \varepsilon.$$

- *x est un point d'accumulation de A si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A \quad \text{tel que} \quad 0 < d(x, y) < \varepsilon.$$

Proposition 11 *Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X et x un point de X. On a*

1. $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.
2. $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

Proposition 12 *Si (X, d) est un espace métrique, alors*

1. *Tout point $a \in X$ admet une base dénombrable de voisinages : $\mathcal{B}(a) = \left\{B\left(a, \frac{1}{n}\right) \ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.*
2. *La famille $\mathcal{B} = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) \ ;\ x \in X,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une base d'ouverts de (X, d).*

Preuve. Si V est un voisinage de a, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nr > 1$ soit $\frac{1}{n} < r$ d'où $B(a, \frac{1}{n}) \subset B(a, r) \subset V$. ■

3 Equivalence de distances

Il y a au moins 2 façons de comparer deux distances définies sur un même ensemble X. On peut se contenter de comparer les topologies associées ou faire une comparaison plus quantitative.

Définition 7 *Soient d et d' deux distances sur un ensemble X.*

- *On dit que d est plus fine que d′ si tout ouvert pour d′ est ouvert pour d.*
- *On dit que d et d′ sont topologiquement équivalentes si chacune est plus fine que l'autre ; i.e. qu'elles définissent la même topologie (la même famille d'ouverts).*

Ces notions se caractérisent aisément avec les boules comme ceci :

Proposition 13 *d est plus fine que d' si et seulement si toute boule ouverte pour d' contient une boule ouverte pour d et de même centre.*

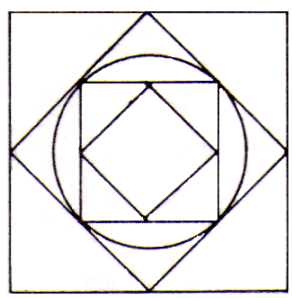
Exemple 11 Dans $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2 et d_∞ sont topologiquement équivalentes deux à deux. Comparons d_1 et d_∞ par exemple. On a d'une part, $d_\infty \leq d_1$ ce qui entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall r > 0 : B_1(x,r) \subset B_\infty(x,r).$$

D'autre part, on a $d_1 \leq n d_\infty$ ce qui se traduit par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall r > 0 : B_\infty\left(x, \frac{r}{n}\right) \subset B_1(x,r).$$

Pour $n = 2$, on voit l'équivalence topologique des distances d_1, d_2 et d_∞ sur la figure ci-dessous



Définition 8 *On dit que deux distances d et d' sur un ensemble X sont (métriquement) équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que*

$$\forall x, y \in X : \quad \alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y) \tag{4}$$

soit

$$\forall x, y \in X,\ \textit{avec}\ x \neq y : \alpha \leq \frac{d'(x,y)}{d(x,y)} \leq \beta.$$

Remarque 4 On peut vérifier que deux distances métriquement équivalentes ont les mêmes parties bornées.

Proposition 14 *Si les distances d et d' sont équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes. La réciproque est fausse.*

Preuve. Supposons que la double inégalité (4) a lieu. Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on a

$$B_d\left(x, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_{d'}(x,r) \subset B_d\left(x, \frac{r}{\alpha}\right).$$

Par ailleurs, sur tout espace métrique (X,d), la distance bornée $d' = \frac{d}{1+d}$ est topologiquement équivalente à d compte tenu de ce que $B_{d'}\left(x, \frac{r}{1+r}\right) \subset B_d(x,r) \subset B_{d'}\left(x, r\right)$, mais d' n'est pas équivalente à d en général, car d' est bornée alors que d ne l'est pas forcément. ■

Exemple 12 Les distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes en vertu des inégalités suivantes

$$d_\infty \leq d_1 \leq \sqrt{n} d_2 \leq n d_\infty. \tag{5}$$

Exemple 13 Les distances D_1, D_2 et D_∞ définies sur l'espace métrique produit $X_1 \times X_2$ (cf. exemple 3) sont équivalentes en vertu des inégalités suivantes

$$D_\infty \leq D_1 \leq \sqrt{2} D_2 \leq 2 D_\infty. \tag{6}$$

Remarque 5 Pour établir la seconde inégalité dans (5) et (6), on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous scalaires $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, ..., n$.

4 Suites dans un espace métrique

Définition 9 (Suite bornée) *Une suite $(x_n)_n$ d'un espace métrique (X,d) est dite bornée si l'ensemble de ses termes $\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans (X,d), i.e. si*

$$\exists a \in X,\ \exists r > 0,\ \forall n \geq \mathbb{N} :\ d(a, x_n) \leq r.$$

Définition 10 (Suite convergente) *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X,d) et soit $a \in X$. On dit que a est une limite de $(x_n)_n$ quand n tend vers l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la boule $B(a,\varepsilon)$, ce qui se résume par*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\varepsilon :\ d(x_n, a) < \varepsilon.$$

On dit aussi que $(x_n)_n$ converge vers a quand n tend vers l'infini et on note $x_n \longrightarrow a$.

Ainsi,

$$x_n \longrightarrow a \overset{\text{déf}}{\iff} \lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0.$$

Exemple 14 La suite de terme général $x_n = (e^{-n}, \frac{1}{n})$ converge vers $(0,0)$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de l'une quelconque des distances principales.

Comme tout espace métrique est séparé, on a :

Proposition 15 *Toute suite $(x_n)_n \subset (X,d)$ a au plus une limite. Si une telle limite $a \in X$ existe, on dit que a est* ***la*** *limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini et on note $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

La notion de convergence d'une suite permet de caractériser l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A d'un espace métrique de la manière suivante :

Proposition 16 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X,d) et soit $x \in X$. On a*

$$x \in \overline{A} \iff \text{Il existe une suite de points de } A \text{ qui converge vers } x.$$

Preuve. Conséquence immédiate de la proposition 23 du chapitre 1 jointe à la proposition 12. ■

Corollaire 2 (Caractérisation séquentielle d'un fermé) *Soit A une partie non vide d'un espace métrique. A est fermée si et seulement si toute suite convergente de points de A a sa limite dans A.*

Preuve. Notons par $L(A)$ l'ensemble des limites des suites convergentes de A, i.e.

$$L(A) = \left\{ x \in X \,;\, \exists\, (x_n) \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x \right\}.$$

La proposition 16 signifie que $L(A) = \overline{A}$. Par conséquent, si $A \supset L(A) = \overline{A}$ alors $A = \overline{A}$ et donc A est fermée. Réciproquement, si A est fermée alors $A = \overline{A} = L(A)$ et A contient donc les limites de toutes ses suites convergentes. ■

Définition 11 (Suite de Cauchy) *On dit qu'une suite (x_n) d'un espace métrique (X,d) est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante (condition de Cauchy) :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m,n \geq N_\varepsilon : \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

c'est-à-dire si, dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

Ceci peut aussi s'écrire comme ceci en posant $m = n + k$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N} : \quad d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon.$$

Exemple 15 La suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Il en est de même pour la suite de terme général $x_n = e^{-n}$.

Voici une autre condition équivalente :

Proposition 17 *Une suite (x_n) d'un espace métrique (X,d) est de Cauchy si et seulement si*

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{diam}(S_p) = 0,$$

où $S_p = \{x_n \,;\, n \geq p\}$.

Preuve. Il suffit d'observer que la condition de Cauchy équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \operatorname{diam}(S_{N_\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

ou de manière équivalente (compte tenu de la décroissance de la suite de parties $(S_p)_p$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_\varepsilon : \quad \operatorname{diam}(S_p) \leq \varepsilon. \tag{7}$$

Ainsi, $(\operatorname{diam}(S_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs et la condition (7) signifie que sa limite est nulle quand $p \to \infty$. ■

Exemple 16 Dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy car, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $S_p = \{-1, 1\}$ d'où $\operatorname{diam}(S_p) = 2$.

Notons les propriétés suivantes des suites de Cauchy.

Proposition 18 *Dans un espace métrique,*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée. La réciproque est fausse.*
3. *Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
4. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.*

5 Espaces métriques complets

Nous avons vu qu'il existe en général des suites de Cauchy qui ne convergent pas. Un espace métrique complet est un espace métrique où toute suite de Cauchy converge.

Définition 12 *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

L'intérêt évident de cette notion réside dans le fait que, dans un tel espace, pour montrer qu'une suite est convergente il suffit d'établir qu'elle vérifie la propriété de Cauchy, ce qui ne suppose pas que l'on connaisse la limite.

Dans les propositions suivantes, on présente quelques exemples et contre-exemples fondamentaux.

Proposition 19 *Muni de sa distance usuelle, $\mathbb{R}$ est complet.*

Preuve. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$ (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Mais alors la proposition 18 donne la convergence de toute la suite. ■

Proposition 20 *Muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.*

Preuve. La suite de nombres rationnels $x_n = \dfrac{\left[2^n\sqrt{2}\right]}{2^n}$ est de Cauchy mais ne converge pas. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sqrt{2} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n\sqrt{2}-1}{2^n} < x_n \leq \frac{2^n\sqrt{2}}{2^n} = \sqrt{2},$$

d'où $x_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, (x_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{Q}$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Proposition 21 *Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On munit l'espace $X_1 \times X_2$ d'une distance produit. Alors, $X_1 \times X_2$ est complet si et seulement si X_1 et X_2 sont complets.*
Plus généralement, si $(X_k, d_k)_{k=1,...,n}$ est une famille finie d'espaces métriques, alors l'espace métrique produit $\prod_{k=1}^n X_k$ est complet si et seulement si X_k est complet pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

En particulier,

Corollaire 3 *Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est un espace complet pour l'une quelconque des distances principales.*

Proposition 22 *Si X est un ensemble et (Y, d) est un espace métrique **complet**, alors $\mathcal{B}(X, Y)$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

Proposition 23 *Etant donné un intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on a :*

i) *l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ est un espace complet pour la distance d_∞ de la convergence uniforme :*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

ii) *l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ n'est pas complet pour la distance d_1 de la convergence en moyenne :*

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Preuve. Laissée en exercice. ■

Proposition 24 *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$, $A \neq \varnothing$.*

i) *Si (A, d_A) est complet, alors A est un fermé de X.*

ii) *Réciproquement, si A est un fermé de X et X est **complet**, alors (A, d_A) est complet.*

Ainsi, **dans un espace métrique complet :**

$$A \textbf{ complet} \iff A \textbf{ fermé}.$$

Proposition 25 *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Une intersection **quelconque** de parties complètes de (X, d) est complète.*
2. *Une union **finie** de parties complètes de (X, d) est complète.*
3. *Si toutes les parties fermées et bornées sont complètes, alors (X, d) est complet.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

6 Continuité et uniforme continuité

6.1 Continuité

Définition 13 *Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $a \in X$. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est continue au point a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \quad f(B(a, \alpha)) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X : \quad x \in B(a, \alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon),$$

soit de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X : \quad d(a, x) < \alpha \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon. \tag{8}$$

Exemple 17 On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. *La fonction indicatrice* de l'ensemble $\mathbb{Q}$, $f = 1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$ (*Prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et raisonner pour $a \in \mathbb{Q}$ puis $a \notin \mathbb{Q}$*).

Proposition 26 *Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, $a \in X$ et $f : X \to Y$ une application. Les* 2 *assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *f est continue en a.*

ii) *f est séquentiellement continue en a.*

Preuve. Conséquence immédiate de la proposition 24 du chapitre 1 jointe à la proposition 12. ■

Proposition 27 *Soient d et d' deux distances sur X ; alors*

1. *d est plus fine que d' si et seulement si l'application identique* id $: (X, d) \to (X, d')$ *est continue.*
2. *d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identique* id $: X \to X$ *est un homéomorphisme de (X, d) sur (X, d').*

6.2 Uniforme continuité

Etant donné deux espaces métriques (X, d) et (Y, d'), la continuité sur X d'une application $f : X \to Y$ s'écrit

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x' \in X : \quad d(x, x') < \alpha \implies d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Le $\alpha > 0$ dépend à la fois de $\varepsilon > 0$ et du point $x \in X$ où l'on teste la continuité, autrement dit, on a $\alpha = \alpha(x, \varepsilon)$. L'uniforme continuité signifie que l'on peut choisir α indépendant de $x \in X$.

Définition 14 *Une application $f : (X, d) \to (Y, d')$ est dite uniformément continue sur X si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0,\ \forall x, x' \in X : \quad d(x, x') < \alpha \implies d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Exemple 18 On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle.

- L'application identique $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue. En effet, à $\varepsilon > 0$, on peut prendre $\alpha = \varepsilon$).
- L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. En effet, si on choisit $\varepsilon = 1$ et on considère pour tout $\alpha > 0$ les nombres $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x' = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{2}$ on obtient $|x - x'| = \dfrac{\alpha}{2} < \alpha$ alors que $|f(x) - f(x')| = \left|x^2 - x'^2\right| = 1 + \dfrac{\alpha^2}{4} > 1 = \varepsilon$.

Un type intéressant d'applications uniformément continues est introduit dans la

Définition 15 *On dit que $f : (X, d) \to (Y, d')$ est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur X si :*

$$\forall x, x' \in X : \quad d'(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x').$$

Si $0 \leq k < 1$, on dit que f est contractante.

On vérifie immédiatement les implications

Proposition 28 *f lipschitzienne $\implies$ f uniformément continue $\implies$ f continue.*

Preuve. Pour la première implication, prendre $\alpha = \varepsilon / k$. La seconde est évidente. ■

Exemple 19 L'application identique $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, d)$ est lipschitzienne (de rapport 1) et donc uniformément continue.

Exemple 20 Sur $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, la fonction arctan est lipschitzienne (de rapport 1) et donc uniformément continue. En effet,

$$\left|\arctan x - \arctan x'\right| = \frac{1}{1 + c^2} \left|x - x'\right| \leq \left|x - x'\right|$$

où c, compris entre x et x', est donné par le théorème des accroissements finis.

Exemple 21 Sur un espace métrique (X, d), pour tout $a \in X$, l'application $d(a, \cdot) : x \mapsto d(a, x)$ de X dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne (de rapport 1) et donc uniformément continue puisque :

$$\forall x, x' \in X : \quad \left|d(a, x) - d(a, x')\right| \leq d(x, x').$$

Exemple 22 Soit $A \subset X,\ A \neq \varnothing$, l'application $d(\cdot, A) : x \mapsto d(x, A)$ de X dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue car lipschitzienne (de rapport 1) d'après la relation

$$\forall x, x' \in X : \quad \left|d(x, A) - d(x', A)\right| \leq d(x, x').$$

Exemple 23 Si on munit l'ensemble produit $X \times X$ de la distance

$$D_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\left\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\right\}$$

alors l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne (de rapport 2) et donc uniformément continue (à vérifier).

Définition 16 *Une application $f : (X, d) \to (Y, d')$ est dite une* <u>*isométrie*</u> *si pour tous $x, x' \in X$ on a $d'(f(x), f(x')) = d(x, x')$.*
Une isométrie est toujours injective. Si de plus, elle est surjective (et donc bijective), son application réciproque est aussi une isométrie bijective. (X, d) et (Y, d') sont alors dits <u>*isométriques*</u>*.*

Une isométrie est uniformément continue car lipschitzienne (de rapport 1).

Proposition 29 *Soit $f : (X, d) \to (Y, d')$ et $g : (Y, d') \to (Z, d'')$ deux applications uniformément continues, f sur X et g sur Y. La composée $h = g \circ f : (X, d) \to (Z, d'')$ est une application uniformément continue sur X.*

Proposition 30 *Une application uniformément continue $f : (X, d) \to (Y, d')$ transforme toute suite de Cauchy dans X en une suite de Cauchy dans Y, i.e. si $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X, alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans Y.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. En vertu de l'uniforme continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in X : \quad d(x, x') \leq \alpha \implies d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon,$$

et compte tenu du fait que $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe pour cet $\alpha > 0$, un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq N : \quad d(x_m, x_n) \leq \alpha.$$

Par suite

$$\forall m, n \geq N : \quad d'(f(x_m), f(x_n)) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y. ■

Proposition 31 *Soit $f : (X,d) \to (Y,d')$ un homéomorphisme <u>uniformément continu</u>. Si (Y,d') est complet, l'espace (X,d) l'est aussi.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X, alors $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y en raison de l'uniforme continuité de f. Comme Y est complet, $(f(x_n))_n$ est convergente. Il en résulte, grâce à la continuité de l'application inverse f^{-1}, que $(x_n)_n$ est convergente dans X (observer que $x_n = f^{-1}(f(x_n))$). ■

Corollaire 4 *Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques. Soit f une bijection de X sur Y, uniformément continue, ainsi que son inverse. Si l'un des espaces X, Y est complet, l'autre l'est aussi.*

En particulier, on a :

Corollaire 5 *Si (X,d) et (Y,d') sont isométriques et si l'un d'eux est complet, l'autre l'est aussi.*

Preuve. Il suffit de remarquer que toute isométrie bijective est uniformément continue ainsi que son inverse. ■

Exemple 24 $\mathbb{C}$ *muni de la distance usuelle est complet (On pourra montrer que l'application $(x,y) \mapsto x+iy$ est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne d_2 sur $\mathbb{C}$).*

Corollaire 6 *Si d et d' sont deux distances métriquement équivalentes sur un ensemble X, alors on a l'équivalence*

$$(X,d) \text{ complet} \iff (X,d') \text{ complet.}$$

Preuve. Laissée en exercice. ■

Proposition 32 (Prolongement par l'uniforme continuité) *Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques, D une partie dense de X et $f : D \to Y$ une fonction uniformément continue. Si Y est complet, alors f admet un prolongement continu unique à X, et ce prolongement est uniformément continu.*

Remarque 6 *Dans la proposition ci-dessus, la condition "f uniformément continue sur D" est essentielle, comme le montre l'exemple suivant :*
L'application $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et non uniformément continue. Elle n'admet pas de prolongement continu à $[0,1]$.

Point fixe de contraction. Beaucoup de problèmes concernant l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations différentielles (ou algébriques) peuvent être ramenés à des problèmes d'existence et d'unicité de points fixes de certaines applications. Le théorème suivant présente un résultat très important dans ce domaine.

Théorème 3 (du point fixe de contraction de Banach-Picard) *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Si l'application* $f : X \to X$ *est contractante de rapport* k*, alors elle admet un unique point fixe* $x^* \in X$, $f(x^*) = x^*$.

De plus, toute suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ *et* $x_0 \in X$ *converge vers* x^**, et l'on a*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x^*) \leq k^n \, d(x_0, x^*) \qquad et \qquad d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} \, d(x_0, x_1). \tag{9}$$

Remarque 7 *La condition "*X *complet" est essentielle, en ce sens que si* (X, d) *n'est pas complet alors la conclusion du théorème n'est pas nécessairement vérifiée. C'est par exemple le cas pour* $X =]0, 1[$, $f(x) = \frac{x}{2}$. *En effet,* f *est contractante de rapport* $\frac{1}{2}$*, mais* f *n'admet aucun point fixe dans* $]0, 1[$.

Remarque 8 *De même, la condition "*$0 \leq k < 1$*" est également essentielle. En effet, l'application*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

est lipschitzienne de rapport $k = 1$*, et on peut vérifier aisément qu'elle n'admet aucun point fixe dans* $\mathbb{R}$.