P1

Solution de la Série N°02

Exercice 01 :

Formule de dérivation numérique centrée d'ordre 2 pour la première dérivée est : $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

et pour la 2ème dérivée est : $f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

calcul de la vitesse $v(t) = y'(t)$:

à l'instant $t = 0,02$: $v(0,02) = y'(0,02) = \frac{y(0,02+h) - y(0,02-h)}{2h}$

selon les valeurs du tableau on peut choisir

$h = 0,01$ ou $h = 0,02$,

en utilisant $h = 0,01$ (le plus petit) on trouve :

$$v(0,02) = y'(0,02) = \frac{y(0,03) - y(0,01)}{2(0,01)} = \frac{13,397 - 1,519}{0,02}$$
$$= 593,9 \ cm/s$$

à l'instant $t = 0,03$: $v(0,03) = y'(0,03) = \frac{y(0,03+h) - y(0,03-h)}{2h}$

on a un seul choix pour $h = 0,01$

$$v(0,03) = y'(0,03) = \frac{y(0,04) - y(0,02)}{2(0,01)} = \frac{23,396 - 6,031}{0,02} = 868,25$$

Calcul de l'accélération $w(t) = y''(t)$:

à l'instant $t = 0,02$: $w(0,02) = y''(0,02) =$ ~~$y(0,02+h) -$~~

$$= \frac{y(0,02+h) - 2y(0,02) + y(0,02-h)}{h^2}$$

selon les valeurs du tableau on peut choisir

$h = 0,01$ ou $h = 0,02$

En utilisant $h = 0{,}01$ (le plus petit) on trouve :

$$w(0{,}02) = y''(0{,}02) = \frac{y(0{,}03) - 2y(0{,}02) + y(0{,}01)}{(0{,}01)^2}$$

$$= \frac{13{,}397 - 2(6{,}031) + 1{,}519}{0{,}0001} = 28540 \text{ cm/s}^2$$

à l'instant $t = 0{,}03$:

$$w(0{,}03) = y''(0{,}03) = \frac{y(0{,}03+h) - 2y(0{,}03) + y(0{,}03-h)}{h^2}$$

on a un seul choix $h = 0{,}01$ donc :

$$w(0{,}03) = y''(0{,}03) = \frac{y(0{,}04) - 2y(0{,}03) + y(0{,}02)}{(0{,}01)^2}$$

$$= \frac{23{,}396 - 2(13{,}397) + 6{,}031}{0{,}0001} = 26330 \text{ cm/s}^2$$

Exercice 02 :

1) Montrons que $f'(x_0) \simeq \dfrac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}$

d'après le développement de Taylor :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots \quad (1)$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2h f'(x_0) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots \quad (2)$$

$4\times(1) - (2)$ donne :

$$4f(x_0+h) - f(x_0+2h) = 3f(x_0) + 2h f'(x_0) + \cdots$$

donc $f'(x_0) \simeq \dfrac{4f(x_0+h) - f(x_0+2h) - 3f(x_0)}{2h}$

2) Evaluation de $f(x) = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$ au point $x_0 = 1$:

pour $h = 0{,}1$: $f'(1) \simeq \dfrac{4f(1+0{,}1) - f(1+2(0{,}1)) - 3f(1)}{2\times 0{,}1}$

$$= \frac{4\sqrt{1{,}1+\sqrt{1{,}1}} - \sqrt{1{,}2+\sqrt{1{,}2}} - 3\sqrt{1+\sqrt{1}}}{0{,}2} = 0{,}52894$$

pour $h = 0,05$: $$f'(1) \simeq \frac{4 f(1+0,05) - f(1+2(0,05)) - 3f(1)}{2 \times 0,05}$$

$$= \frac{4\sqrt{1,05+\sqrt{1,05}} - \sqrt{1,1+\sqrt{1,1}} - 3\sqrt{1+\sqrt{1}}}{0,1} = 0,52999$$

3) l'ordre de l'approximation :

en utilisant le développement de Taylor on a :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1) \quad \text{---} \ (1)$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2h f'(x_0) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{8h^3}{3!} f'''(\xi_2) \quad \text{--} \ (2)$$

$4 \times (1) - (2)$ donne :

$$4f(x_0+h) - f(x_0+2h) = 3f(x_0) + 2h f'(x_0) + \frac{4h^3}{3!} f'''(\xi_1) - \frac{8h^3}{3!} f'''(\xi_2)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{4f(x_0+h) - f(x_0+2h) - 3f(x_0) + \frac{4h^3}{3!}\left(-f'''(\xi_1) + 2f'''(\xi_2)\right)}{2h}$$

$$= \frac{4f(x_0+h) - f(x_0+2h) - 3f(x_0)}{2h} + \frac{2h^2}{3!}\left(-f'''(\xi_1) + 2f'''(\xi_2)\right)$$

donc l'erreur de l'approximation est :

$$E = |f'_{ex}(x_0) - f'_{app}(x_0)| = \left| f'_{ex} - \frac{4f(x_0+h) - f(x_0+2h) - 3f(x_0)}{2h} \right|$$

$$= \frac{2h^2}{3!} \left| -f'''(\xi_1) + 2 f'''(\xi_2) \right|$$

$$\leq c\, h^2$$

donc l'approximation est d'ordre 2.