$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b x_t + n_t \qquad (\text{٧,٢a})$$

أو

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b x_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} e_t \qquad (\text{٧,٢b})$$

حيث:

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s$$
$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$$
$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$$
$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$$

لاحظ أن $\omega(B)$و$\delta(B)$ يحلان محل $v(B)$ في تحديد العلاقة بين السلسلتين الزمنيتين ، و$\theta(B)$ و$\phi(B)$ مشغلا المتوسط المتحرك والانحدار الذاتي المطلوبين لتخليص n_t من أثر هاتين العمليتين لتبقي فقط الضجة البيضاء e_t.

أما المعالم**b،r،s،p**و**q** فتفسر كما يلي :

b: تعني أن التأخير **delay** أو الفترة (عدد الوحدات الزمنية) قبل أن تبدأ **x** في التأثير على **y** هو **b** وحدة زمنية. وعلى هذا فإن x_t سيكون تأثيرها الأول على y_{t+b} و x_{t-b} تؤثر أولاً على y_t وهكذا.

r: تعني أن **y** تتأثر بقيمها السابقة حتى إبطاء **r** . أي y_t تتأثر بy_{t-1}، y_{t-2}، ...، y_{t-r}.

s: تعني أن القيمة الجديدة ل**x** ستستمر في التأثير على **y** لعدد **s** من الفترات الزمنية. أو بمعني آخر y_t تتأثر بالقيم من x_{t-b-s} وحتى x_{t-b} .

من ناحية أخري ، فإن السبب في كتابة الحد الأول بالطرف الأيمن من (٧,٢b) هو لحصر عدد المعالم في الجزء الخاص بالعلاقة بين x وy في الدالة التحويلية على $r+s$. ذلك أنه إذا تم فك المقدار $\delta(B)^{-1}$ كمتسلسلة لانهائية فإن عدد المعالم التي تحدد العلاقة سيكون لانهائي أيضاً أما وضعه بالصورة $\dfrac{\omega(B)}{\delta(B)}$ فيحصر عدد المعالم في الرقم المذكور.

٧,٢,٢ خطوات بناء نموذج دالة تحويلية

تمر عملية بناء نموذج الدالة التحويلية بنفس مراحل بناء نموذج أريما وهي تحديد النموذج ، تقدير المعالم وإجراء اختبار تشخيصي مع الفارق في أن المرحلة الأولي تمر أيضاً بعملية تنقية مكثفة للسلسلتين الزمنيتين من المؤثرات المعروفة. فإذا كانت كل من سلسلة المدخل X_t والمخرج Y_t بشكلها الخام فإن خطوات بناء نموذج الدالة التحويلية يمكن تلخيصها في الخطوات التالية :

المرحلة الأولي: تحديد شكل النموذج :

تتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:

١.تجهيز سلسلة المدخل وسلسلة المخرج:

ويعني ذلك إجراء الفروق اللازمة لتحقيق الاستقرار في المتوسط ، وإجراء التحويلات اللازمة لتحقيق الاستقرار في التباين. كذلك تتم في هذه الخطوة إزالة أى تأثير موسمي في السلسلتين إن وجد.

٢.إجراء تبييض مسبق **prewhitening** لكل من سلسلة المدخل وسلسلة المخرج:

تبييض السلسلة x_t يقصد به بناء نموذج أريما يمثلها مثلاً النموذج (p_x, o, q_x) **ARIMA** وتطبيقه على x_t للحصول على سلسلة البواقي α_t من $\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)\alpha_t$ الهدف من ذلك هو تنقية x_t بإزالة أي نمط (معروف) ناتج عن عملية انحدار ذاتي أو متوسط متحرك فلا تبقي فيها سوي

ضجة بيضاء هي α_t.أما تبييض y_t فيتم بنفس الطريقة لكن باستخدام نفس النموذج أي نفس $\phi_x(B)$ و$\theta_x(B)$ على y_t حتى لا تختل العلاقة بين x_t و y_t بسبب اختلاف النموذج. هذا يؤدي للضجة البيضاء الخاصة ب y_t والمعرفة ب $\phi_x(B)y_t = \theta_x(B)\beta_t$.

تسمي السلسلتين الجديدتين α_t و β_t السلسلة المبيضة (مسبقاً) ل x_t والسلسلة المبيضة (مسبقاً) ل y_t بالترتيب. هذا يعني أن العلاقة بين α_t و β_t ستكون خالية من تأثيرات عمليات الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك.

٣. حساب الارتباطات الذاتية والارتباطات المقطعية

في هذه الخطوة تحسب الارتباطات الذاتية لسلاسل المدخل والمخرج المبيضة α_t و β_t . كذلك تحسب الارتباطات المقطعية – بإبطاءات مختلفة– بين α_t و β_t .

يعرف التغاير المقطعي **Cross covariance** من العينة بين **X** و**Y** بإبطاء **k** ويرمز له ب$C_{xy}(k)$:

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(Y_{t+k} - \overline{Y}\right)$$

والتباينات بالتالي :$C_{xx}(0)$ و$C_{yy}(0)$.

وعليه فإن الارتباط المقطعي بإبطاء **k** بين **X** و**Y** :

$$r_{xy}(k) = \frac{C_{xy}(k)}{\sqrt{c_{xx}(0)c_{yy}(0)}}$$

ويعطي في الواقع الارتباط بين قيم **X** في الزمن **t** وقيم **Y** التي تبعد عنها زمنياً ب**k** وحدة أي في الزمن $t+k$. وتعطي مخرجات الحاسب الآلي عادة قيم الارتباط المقطعي بيانياً.

وإذا كانت السلسلتان ضجة بيضاء فإن الارتباط المقطعي سيكون متوسطة صفر وتباينه $\frac{1}{n}$. أما إذا كانت إحداهما فقط ضجة بيضاء فأن الخطأ المعياري (١٩٤٦) **Bartlett** لارتباط مقطعي بإبطاء **k** يكون تقريباً $\sqrt{\frac{1}{n-k}}$.

وبينما تلعب الارتباطات الذاتية دوراً مهماً في نماذج أريما (ذات المتغير الواحد) تلعب الارتباطات المقطعية الدور الهام في الدالة التحويلية.

٤. تقدير مباشر لأوزان الدالة التحويلية ويقصد بالأوزان هنا $v_1, v_2, ..., v_k$ في (٧,١). يمكن كتابة (٧,١) بدلالة السلاسل **X** ، **Y** و **N** بعد أن أجريت عليها الفروق والتحويلات اللازمة لجعلها مستقرة بالشكل (بافتراض $b = 0$):

$$y_t = v(B)x_t + n_t \qquad ...(٧,٣)$$

إذا قمنا بتبييض السلاسل الثلاث باستخدام التحويلة $\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}$ أي وضعنا

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} y_t = v(B)\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} x_t + \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} n_t$$

نحصل على :

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + e'_t$$

بضرب الطرفين في α_{t-k} وأخذ التوقع :

$$E(\alpha_{t-k}\beta_t) =$$
$$v_o E(\alpha_{t-k}\alpha_t) + v_1 E(\alpha_{t-k}\alpha_{t-1}) + ... + v_k E(\alpha_{t-k}\alpha_{t-k}) + E(\alpha_{t-k}e_{t)}$$

وبما أن الضجة **e** يفترض أنها مستقلة عن α ، وبما أن ال $\alpha's$ مستقلة عن بعضها ، فإن جميع الحدود في الطرف الأيمن تكون أصفاراً ما عدا الحد قبل الأخير

حيث يساوي تباين α مضروباً في v_k. أما الطرف الأيسر فهو التغاير المقطعي $c_{\alpha\beta}(B)$ وبالتالي :

$$C_{\alpha\beta}(k) = v_k C_{\alpha\alpha}(0) = v_k s_\alpha^2$$

أو

$$v_k = \frac{C_{\alpha\beta}(k)}{S_\alpha^2} = \frac{C_{\alpha\beta}(k) S_\beta}{S_\beta S_\alpha \ \ S_\alpha}$$

$$= r_{\alpha\beta}(k) \frac{S_\beta}{S_\alpha} \qquad \text{...(٧ , ٤)}$$

وبالتالي يمكن تقدير الوزن ذو الرتبه **k** بضرب مقدر الارتباط المقطعي بين α_t و β_t في الانحراف المعياري للسلسلة β_t والقسمة على الانحراف المعياري للسلسلة α_t .

٥. تحديد القيم **r،s،b**

في الخطوة الخامسة من المرحلة الأولي نقوم بتحديد قيم **r،s،b**. باستثناء **b** فإن تحديد قيم لهذه المعالم ليس سهلاً. بصفة عامة يمكن الاستهداء بالقاعدة التالية عند التحديد :

نفحص الارتباطات المقطعية :

(i) فإذا كانت قيم الارتباطات المقطعية غير معنوية حتى الإبطاء **m** حيث أصبحت معنوية نأخذ $b = m$.

(ii) إذا لم يكن هناك نمطاً معيناً للارتباطات المقطعية بعد الإبطاء **m** وحتى الإبطاء $m + a$ نضع $s = a$.

(iii) إذا ظهر نمط محدد بعد $m + a$ وحتى $m + a + c$ نضع $r = c$

تطبيق هذه القاعدة لا يتوقع أن يكون سهلاً أو واضحاً فإذا تعذر تحديد القيم بسهولة يمكن تجربة عدة مجموعات من القيم واختيار المجموعة التي تعطي أقل خطأً وفق معيار مناسب مثلاً متوسط مربعات الخطأ.

٦. تقدير مبدئي للضجة n_t

بعـد تقـدير الأوزان $v_1, v_2, \ldots$ باسـتخدام (٧,٤) في الخطـوة (٤) يمكـن بالنظر ل(٧,٣) تقدير الضجة n_t من

$$\begin{aligned} n_t &= y_t - v(B)x_t \\ &= y_t - v_o x_t - v_1 x_{t-1} - \ldots - v_g x_{t-g} \end{aligned}$$

حيث **g** قيمة عملية مناسبة يحددها صاحب النموذج.

٧. تحديد p_n و q_n لنموذج أريما ل**ARIMA**n_t (p_0, o, q_n)

لسلسلة n_t المقدرة في الخطوة (٦) نختار نموذج أريما مناسب مثلاً

$$\phi_n(B)n_t = \theta_n(B)e_t$$

حيث استخدم المؤشر **n** ليذكر بأن السلسلة هي سلسلة الضجة n_t.

المرحلة الثانية : تقدير معالم نموذج الدالة التحويلية

ويشمل ذلك تقـدير جميـع المعـالم الموجـودة في $\omega(B)$، $\delta(B)$، $\phi(B)$ و $\theta(B)$ في النموذج (٧.٢**b**). باستخدام خوارزمية ماركواردت مثلاً.

المرحلة الثالثة : الاختبار التشخيصي:

بعد تحديد شكل نموذج الدالة التحويلية (أو أكثر من نموذج لها) وتقدير جميـع المعالم لابد من اختباره للتأكد من صحته. ويتطلب ذلك فحـص البـواقي النهائيـة e_t والسلسلة α_t. ونخلص لأن النموذج مناسب إذا تم التأكد من أن :

(**i**) جميـع الارتباطـات الذاتيـة والذاتيـة الجزئيـة صـغيرة وعشـوائية (مـن رسمهـا أو استخدام اختبار مثل بوكس ولوجنق).

(**ii**) الارتباطات المقطعية بين البواقي e_t و α_t غير معنوية.

٧,٢,٣ استخدام نموذج الدالة التحويلية للتنبؤ

لاستخدام نموذج الدالة التحويلية المقـدر للتنبـؤ يجـب أولاً تفكيكـه وترتيـب حدوده لتصبح في شكل نموذج انحدار كما فعلنا في حالة نموذج أريما. غير أن العمليات

في حالة الدالة التحويلية قد تغدو معقدة للغاية. ويمكن تنفيذ كل ذلك باستخدام حزمة SPSS (اصدار ١٧ مثلاً) والتي تقوم باختيار وتقدير نموذج الدالـة التحويليـة عنـدما تتوفر سلسلتان زمنيتان X وY.

وكمثال لتطبيق الدالة التحويلية نذكر أن بوكس وجنكنيز (١٩٧٦) اسـتخدما الدالة التحويلية لنمذجة العلاقة بين معدل الغاز (الداخل لفـرن غـاز) وتمثـل سلسـلة المدخل والنسبة المئوية لثاني أكسيد الكربون في الغاز الخـارج وتمثـل سلسـلة المخـرج. وكان النموذج الذي توصلا إليه هو:

$$Y_t = \frac{-(0.53+0.37B+0.51B^2)}{(1-0.57B)} X_{t-3} + \frac{e_t}{(1-1.53B+0.63B^2)}$$

ولاستخدام هذه الدالة في التنبؤ ينبغي أولاً ضرب جميع الحـدود في الأقـواس التي بالمقام ، فك الأقواس وترتيبها في شكل نموذج انحدار كما أشرنا أعلاه.

أيضاً استخدم أمستد (Umstead ١٩٧٧) الدالة التحويليـة للتنبـؤ بأسـعار الأسهم مستخدماً رقم قياسي مركب كسلسلة المدخل ، كما طور هلمـرو جوهانسـون (Helmer & Johanson) نمـوذج دالـة تحويليـة يـربط بـين مبيعـات نـوع مـن الخضروات والصرف على الدعاية.

٧,٣ تحليل التدخل Intervention analysis

يمكن النظر لتحليل التدخل (الفكرة أصلاً لبـوكس وتيـاو (١٩٧٥) Box &Tiao) كحالة خاصة من الدالة التحويلية وإمتداد لهـا. وفي أبسـط صـورة يهـدف تحليل التدخل لمعرفة كيفية تأثير حدث ما على متغير معني. مثلاً تأثير وقف الحـرب في جنوب السودان أو اكتشاف البترول على الـدخل القـومي للسـودان. أو تـأثير حظـر البترول العربي في السبعينات على اقتصاديات الدول الغربية. والتأثير المطلوب معرفته لا يقتصر فقط على معـرفة مداه ، وإنما أيضاً كم يمر من الوقت قبل أن يبدأ أثر التدخل في الظهور على المتغير محل الدراسة ولكم من الوقت يستمر.

ويأخذ النموذج في أبسط صورة الشكل :

$$Y_t = v(B) I_t + e_t$$

حيث I_t متغير مؤشر بأخذ القيمة "١" إذا كانت **t** من فترات التغير (مثلاً وقف الحرب) و"٠" إذا لم تكن كذلك. وقد تم تعميم هذه الفكرة لتشمل عدة تـدخلات. ففـي حال أعم (Montgomery & Weatherby (١٩٨٠)) بأخذ النموذج الصورة :

$$Y_t = \sum_{i=1}^{k} v_i(B) X_{it} + e_t$$

حيث تمثل $X_i \; (i = 1,...,k)$ متغيرات التدخلات والتي قد تكون كلها أو بعضها متغيرات صورية ثنائية القيمة.

وقد طبق تحليل التدخل بنجاح لمعرفـة تـأثير تغـيرات مختلفـة علـى مـتغيرات إقتصادية وبيئية. فقد طبق مثلاً لمعرفة تأثير دعم الجمعية الأمريكية لطب الأسنان لنوع من معجون الأسنان على سوق معجون الأسنان. كذلك استخدمت تقنية تحليـل التدخل لتحديد تأثير الحظر العربي على البترول في سبعينات القرن العشرين. وفي مجال المرور استخدام تحليل التدخل لمعرفة التأثير على عدد حوداث المـرور لتـدخلات مثـل فرض التأمين الاجباري واضراب حدث في فترة معينة لشركات التأمين. وفي مجال البيئة طبق تحليل التدخل لمعرفة تأثير تعديلات تاهيلية أساسية اجريت في سد رئيسـى علـى أداء مشروع زراعي كبير يعتمد عليه بسريلانكا.

٤, ٧ السلاسل الزمنية المتجهية Vector Time Series

السلاسل الزمنية التي تعرضنا لها حتى الآن تتميز كل منها بأنها وحيدة المتغير. فالمتغير Y_t في السلسلة يرمز لقيمة متغير واحد (المتغير الذي تمثله السلسلة) في الـزمن **t**. وهو قبل مشاهدة قيمته متغير عشوائي يمكن أن يأخذ أى قيمة من القيم التـى تقـع فى مجاله.

نفرض الآن أنه في الزمن **t** بدلاً من أن تؤخذ مشاهدة في مـتغير واحـد (مـثلاً الطول) تؤخذ مشاهدة في كل من **m** متغير (مثلاً الطول ، الوزن ، العمر،...الخ). أى

أن المشـــاهدة في الـــزمن t ذات **m** بعـــد. فـــإذا رمزنـــا لهـــذه المـــتغيرات ب $Y^{(1)},Y^{(2)},\ldots,Y^{(m)}$ فإن قيم المتغيرات في الزمن t يمكن تمثيلها بالمتجة $\underline{Y}_t$ حيث :

$$\underline{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \\ \vdots \\ Y_t^{(m)} \end{bmatrix}$$

وعليه فإن السلسلة الزمنية المأخوذة في **n** وحدة زمنية تتكون من التالي:

$$\underline{Y}_1,\underline{Y}_2,\ldots,\underline{Y}_t,\ldots,\underline{Y}_n$$

هذه السلسلة سلسلة زمنية متعددة المتغيرات **Multivariate time series** وتسمى عـادة سلسلـة زمنية متهجية **vector time series**. ويعرّف المتوسـط والتغاير بنفس الطريقة التي في حالة المتغير الواحد – الفرق هو أننا هنـا نتحـدث عـن متجهات. فنجد أن متجه المتوسطات في الزمن t ويرمز له ب $\underline{\mu}_t$:

$$\underline{\mu}_t = E(\underline{Y}_t)$$

ومصفوفة التغاير ل $\underline{Y}_t$ و $\underline{Y}_{t+k}$ تعرّف ب $Cov(\underline{Y}_t,\underline{Y}_{t+k})$ وهى مصفوفة ذات رتبة **mxm** وتعطي التغاير بإبطاء **k** للـ**m** متغير في الزمن **t**.

وشرط الاستقرار (الضعيف) في حالة السلسـلة الزمنيـة متعـددة المـتغيرات مشـابه لـذلك المطلوب في حالة السلسلة وحيدة المتغير. فالسلسلة الزمنية متعددة المتغيرات تكون مستقرة إذا كان كل من متجه المتوسطات $\underline{\mu}_t$ ومصفوفة التغـاير $Cov(\underline{Y}_t,\underline{Y}_{t+k})$ مستقل عن الزمن **t**. في هذه الحالة نكتب :

$$\underline{\mu}_t = \underline{\mu} \quad \text{و}$$

$$Cov(\underline{Y}_t,Y_{t+k}) = \Sigma_k$$

لتأكيد عدم الاعتماد على **t**. لاحظ أن العنصر (i,i) في القطر الرئيسي ل $\sum_k$ هو التغاير بإبطاء **k** للمتغير $Y^{(i)}$. بينما يسمي العنصر (i,j) حيث $i \neq j$ التغاير المقطعي **cross-covariance** ل $Y^{(i)}$ و $Y^{(j)}$.

وكمثال لنمذجة سلسلة زمنية متعددة المتغيرات نتناول عملية انحدار ذاتي متعددة المتغيرات **multivariate autoregressive process** أو ما يطلق عليها أحياناً عملية انحدار ذاتي متجهية **vector autoregressive process**. يرمز لهذه العملية اختصاراً ب**VAR(P)** حيث **P** رتبه عملية الانحدار الذاتي. هذه العملية هى تتالي المتجهات العشوائية ... $\underline{Y}_1,\underline{Y}_2,\ldots,\underline{Y}_t,\ldots$ ذات ال**m** بعد والتي تحقق :

$$\underline{Y}_t = \underline{\mu} + \sum_{j=1}^{P} \underline{\phi}_j \left(\underline{Y}_{t-j} - \underline{\mu}\right) + \underline{e}_t \quad \ldots (٧,١)$$

حيث

$$\underline{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ \vdots \\ Y_t^{(m)} \end{bmatrix}, \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \\ \vdots \\ \mu^{(m)} \end{bmatrix}, \underline{e}_t = \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ \vdots \\ e_t^{(m)} \end{bmatrix}, \underline{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_{2i} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{mi} \end{bmatrix}$$

في هذا النموذج افترضنا أن $\underline{\phi}_j$ قطرية مما يعني أن المتغيرات في $\underline{Y}_t$ ليست دوالاً قي بعضها . في الحالة العامة (أنظر مثال (١ , ٧)) يمكن لأى متغير أن يكون دالة في متغير آخر بجانب قيمة السابقة مما يجعل $\underline{\phi}_j$ غير قطرية. وينتج عن تساوي العناصر المتقابلة في طرفي المعادلة **m** معادلة الأولى منها على سبيل المثال – تأخذ الشكل :

$$Y_t^{(1)} = \mu^{(1)} + \sum_{j=1}^{P} \phi_{1j} \left(Y_{t-j}^{(1)} - \mu^{(1)}\right) + e_t^{(1)}$$

وهو شكل عملية انحدار ذاتي برتبه **P**.

مثال (١ , ٧)

النموذج التالي نموذج انحدار ذاتي متجهي ذو رتبه ١ وبعدين (أى نمـوذج (١)VAR ذو البعدين). في النموذج ترمز $Y_t^{(1)}$ لمعـدل الفائـدة و $Y_t^{(2)}$ للميـل للاسـتثمار في الزمن t:

$$\underline{Y}_t = \underline{\mu} + \underline{\phi}_1\left(\underline{Y}_{t-j} - \underline{\mu}\right) + \underline{e}_t$$

حيث :

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} m_t^{(1)} \\ m_t^{(2)} \end{bmatrix}; \underline{e}_t = \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ e_t^{(2)} \end{bmatrix}; \underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}; \underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

وحيث ال $e_t^{(\cdot)}$ متغيرات عشوائية تحقق (حيث $k = t - t'$):

$$E\left(\underline{e}_t\right) = \underline{0}; \operatorname{cov}\left(e_t^{(1)}, e_{t'}^{(2)}\right) = \begin{cases} \gamma_{1,2}(k) & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases}$$

هذا النموذج ثنائي البعد يعنى أننا نعتقد أن معدل الفائدة والميل للاستثمار يرتبطان بعلاقة تمثلها المعادلتان :

$$Y_t^{(1)} - \mu^{(1)} = \phi_{11}\left(Y_{t-1}^{(1)} - \mu^{(1)}\right) + e_t^{(1)}$$
$$Y_t^{(2)} - \mu^{(2)} = \phi_{21}\left(Y_{t-1}^{(1)} - \mu^{(1)}\right) + \phi_{22}\left(Y_{t-1}^{(2)} - \mu^{(2)}\right) + e_t^{(2)}$$

لا يختلف الأساس النظري للنمـوذج (١)VAR عـن ذلـك الـذي للنمـوذج (١)AR كثيراً. فهناك تناظر في الكثير من المواقـع. فمـثلاً إذا أخـذنا نعـوض بالتتـالي عـــن Y_{t-2} ، Y_{t-1} ، Y_{t-3} عـــن Y_{t-2} ،... في الطـــرف الأيمـــن حتـــى وصـــلنا ل $\underline{Y}_{t-t} = \underline{Y}_0$ للحالة $P = 1$ فسنصل للمعادلة :

$$\underline{Y}_t = \underline{\mu} + \sum_{j=0}^{t-1} \underline{\phi}_1^j \underline{e}_{t-j} + \underline{\phi}_1^t\left(\underline{Y}_0 - \underline{\mu}\right)$$

والتي تناظر المعادلة (٣,٥) بالباب الخامس لحالة العملية **AR(١)**. ولتصبح هذه العملية مستقرة فإن قوى $\underline{\phi}_1$ ينبغي أن تتقارب للصفر. في حالة $\underline{\phi}_1$ مصفوفة يتطلب ذلك أن تكون الجذور المميزة ل $\underline{\phi}_1$ عددياً أقل من ١.وهناك متطلب مشابه للاستقرار للنموذج **VAR(P)**.

مثال (٧,٢)

هل عملية الانحدار الذاتي متعددة المتغيرات التالية مستقرة ؟

$$\begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1}^{(1)} \\ Y_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ e_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

لتكون العملية مستقرة يجب ان يكون الجذران المميزان للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

كلاهما عددياً أقل من ١.إذن نوجد أولاً الجذرين المميزين لهذه المصفوفة. هذين الجذرين نحصل عليهما بحل المعادلة المميزة :

$$\begin{vmatrix} 0.4-\lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

حيث العلامة $|\ |$ تشير للمحدد. بفك المحدد نصل للمعادلة

$$(0.4-\lambda)(0.1-\lambda) - 0.04 = 0$$

أو

$$\lambda(\lambda - 0.5) = 0$$

وبالتالي الجذرين المميزين هما $\lambda = 0$ و $\lambda = 0.5$ وبما أن $|\lambda|$ أقل من ١ لكلا الجذرين نستنتج أن العملية مستقرة.

عملية تحديد نموذج انحدار ذاتي متعدد المتغيرات وتقدير معالمه واختيار صحته تشبه كثيراً العملية المطلوبة لنموذج انحدار ذاتي وحيد المتغير.

مثال (٧,٣)

كمثال آخر نأخذ نموذج كينز البسيط للاقتصاد والذي يربط بين الدخل القومي Y والاستهلاك C والاستثمار I من خلال المعادلات :

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha Y_{t-1} + e_t^{(1)} \\ I_t &= \beta\left(C_{t-1} - C_{t-2}\right) + e_t^{(2)} \\ Y_t &= C_t + I_t \end{aligned} \qquad (٧,٢)$$

فإذا عوضنا عن Y_{t-1} في المعادلة الأولي بقيمتها في الأخيرة نتخلص من Y وتبقي لدينا المعادلتين :

$$C_t = \alpha C_{t-1} + \alpha I_{t-1} + e_t^{(1)}$$

$$I_t = \beta\left(C_{t-1} - C_{t-2}\right) + e_t^{(2)}$$

ولنبقي على ترميزنا السابق بقدر الإمكان سنضع :

$$\phi_{21,2} = -\beta ، \ \phi_{22,2} = \phi_{12,2} = \phi_{11,2} = 0 ، \ \phi_{11,1} = \phi_{12,1} = \alpha ، \mathrm{Y}_t^{(1)} = C_t$$

$$\phi_{21,1} = \beta ، \ \phi_{22,1} = 0 ، \mathrm{Y}_t^{(2)} = I_t$$

وبتعريف المصفوفات :

$$\underline{e}_t = \begin{bmatrix} e_t^{(1)} \\ e_t^{(2)} \end{bmatrix} ، \ \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \phi_{11,2} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{bmatrix} ، \ \underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{bmatrix} ، \ \underline{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

يصبح النموذج (٧,٢) بالشكل :

$$\underline{Y}_t = \sum_{j=1}^{2} \underline{\phi}_j - \underline{Y}_{t-j} + \underline{e}_t$$

وهو نموذج انحدار ذاتي متعدد المتغيرات برتبة ٢ أي VAR(٢).

٧,٥ السلاسل الزمنية المالية Financial time series

في السنوات الأخيرة استحوذت السلاسل الزمنية المالية مثل تلك التي في مجال الأسهم على اهتمام كبير من جانب الباحثين في حقل السلاسل الزمنية. وتعكس الأدبيات كثافة الأبحاث التي أجريت ولازالت تجري في الموضوع. وفي هذا الفصل محاولة لتعريف القارئ ببعض المفاهيم الأساسية في هذا الفرع الهام من السلاسل الزمنية.

١, ٥, ٧ التكامل المشترك Co integration

إذا احتاجت السلسلة الزمنية لإجراء فرق ذو رتبه **d** لتصبح مستقرة يقال إنها تكاملت برتبه **d** (**Integrated of order d**) ويرمز لها ب**I(d)**. وإذا كانت كل من السلسلتين $\tilde{Y}_t$ و $\tilde{X}_t$ متكاملة برتبه **d** فإن أي توليفة خطية ل $\tilde{Y}_t$ و $\tilde{X}_t$ ستكون في الحالة العامة متكاملة برتبه **d**.

ولكن إذا كان هناك متجه $\underline{\beta}$ بحيث تكون سلسلة البواقي الناتجة عن انحدار $\tilde{Y}_t$ على $\tilde{X}_t$ ذات رتبة أقل ، مثلاً $d-a$ (حيث $a>0$)، فإن السلسلتين $\tilde{Y}_t$ و $\tilde{X}_t$ توصفان بأنهما متكاملتان معاً أو تحققان تكامل مشترك برتبة **(d,a)** أو **CI(d,a)** (التسمية ترجع لإنجل وقرانقر ١٩٨٧، **Engle & Granger**)(**Cointeg rated of order (d,a)**.

بصفة خاصة إذا كانت كل من $\tilde{Y}_t$و $\tilde{X}_t$ متكاملة برتبه ١ وكانت البواقي **I(٠)** فإن السلسلتين تكونان متكاملتين معاً برتبه (١ , ١) أى **CI(١ , ١)**. ويسمي المتجه $\underline{\beta}$ المتجه المكامل **Cointegrating vector**. وهناك أسباب متعددة يمكن أن تؤدى لسلسلتين بتكامل مشترك منها أن تكون أحدى العمليتين "تقود" الأخرى ، أو أن "يقاد" كليهما بعملية أخري خفية. ويعنى التكامل المشترك **CI(١ , ١)** (الذي فيه كل من السلسلتين **I(١)** وسلسلة البواقي **I(٠)**) أنه رغم أن كل من السلسلتين غير مستقرة إلا أن حركتهما في المدى الطويل تكون مرتبطة وتتجه نحو وضع توازن تكون فيه الفروقات بينهما ثابتة وسلسلة البواقي من إنحدار إحداهما على

الأخرى مستقرة.لاحظ أن البواقي هى توليفه خطية في السلسلتين.

مثال (٤ , ٧)

سعر التبادل للدولار الأمريكي بالنسبة للجنية البريطاني ، X_t ، يفترض انه يعتمد على القوة الشرائية $\frac{P_t}{Q_t}$ حيث P_t و Q_t الرقم القياسي للمستهلك في الولايات المتحدة وبريطانيا بالترتيب. وقد وجد أن حركة سعر التبادل يمكن تمثيلها بالنموذج :

$$\ln X_t = \ln \frac{P_{t=}}{Q_t} + Y_t$$

$$Y_t = \mu + \phi(Y_{t-1} - \mu) + e_t + \beta e_{t-1}$$

حيث e ضجة بيضاء بمتوسط صفر و $|\phi| < 1$.

من ناحية أخرى تبين أن كل من $\ln P_t$ و $\ln Q_t$ يمكن تمثيلها بنموذج أريما ARIMA(١ , ١ , ٠) أي بالنموذجين (بالترتيب) :

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)(\ln P_t - \mu_t) = e_t^{(1)}$$

$$(1 - \phi_2 B)(1 - B)(\ln Q_2 - \mu_2) = e_t^{(2)}$$ و

هذا يعنى أن كل من العمليتين $\ln P_t$ و $\ln Q_t$ غير مستقرة لأنها تحتاج لأخذ فرق برتبة ١ لتصبح مستقرة. بمعني آخر كل منهما I(١). كذلك لوغارثم سعر التبادل X_t غير مستقر وهو أيضاً I(١). أما Y_t فهي أرما مستقرة ARMA(١ , ١) (كما تشير بذلك معادلتها) وعليه فإن المتجه $\{\ln X_t, \ln P_t, \ln Q_t\}$ متكامل برتبة I(١).

لكن هناك متجه $\underline{\beta} = [1, -1, 1]$ بحيث أن التوليفة الخطية (باستخدام المعادلة الأولي):

$$\ln X_t - \ln P_t + \ln Q_t = \ln \frac{P_t}{Q_t} + Y_t - \ln P_t + \ln Q_t = Y_t$$

والتي هي كما ذكرنا مستقرة أي متكاملة برتبة ٠((٠)I).

إذن تتالى المتجهات $\{\ln X_t, \ln P_t, \ln Q_t\}$ حيث $t = 1,2,...$ يمكن نمذجته بنموذج تكامل مشترك (١ , ١)I المتجه المكامل فيه هو (١ , ١ -١,) .

مثال ٥ , ٧

لدينا العمليتان :

$$X_t = 0.65X_{t-1} + 0.35Y_{t-1} + e_t^x$$
$$Y_t = 0.35X_{t-1} + 0.65Y_{t-1} + e_t^x$$

(i) أثبت أن كل من X_t و Y_t متكاملة برتبة "١" أي (١)I

(ii) أثبت أن العمليتين X_t و Y_t تحققان تكاملاً مشتركاً بمتجه مكامل (١-،١).

الحل :

(i) من المعادلة الأولي يمكن التعبير عن Y_{t-1} بدلالة X_t و X_{t-1} :

$$Y_{t-1} = \frac{1}{0.35}(X_t - 0.65X_{t-1} - e_t^x)$$

وإذا عوضنا هذه القيمة في الطرف الأيمن من المعادلة الثانية بدلاً عن Y_{t-1} وفي الطرف الأيسر (بعد زيادة كل المؤشرات بمقدار١) بدلاً عن Y_t نجد

$$\frac{1}{0.35}(X_{t+1} - 0.65X_t - e_{t+1}^x)$$
$$= 0.35X_{t-1} + \frac{0.65}{0.35}(X_t - 0.65X_{t-1} - e_t^y) + e_t^y$$

وبعد التبسيط

$$X_{t+1} = 1.3X_t - 0.3X_{t-1} + e_{t+1}^x - 0.65e_t^x + 0.35e_t^y$$

وواضح أن X_{t+1} غير مستقرة لأن القيمة المطلقة لمعامل X_t أكبر من ١. لكـن إذا أخذنا الفرق الأول أي طرحنا X_t من الطرفين نحصل على

$$\nabla X_{t+1} = 1.3X_t - 0.3X_{t-1} + e^x_{t+1} - 0.65e^x_t + 0.35e^y_t - X_t$$

$$= 0.3X_t - 0.3X_{t-1} + e^x_{t+1} - 0.65e^x_t + 0.35e^y_t$$

حيث $\nabla = 1 - B$. وبما أن كل معاملات X في الطرف الأيمن أقل عـدديًا من ١ تكون ∇X_{t+1} مستقرة. إذن X_t متكاملة برتبة "١" أي I(١). بنفس الطريقـة يمكن أن نرى أن Y_t أيضاً I(١).

(ii) إذا كانت العمليتـان X_t و Y_t تحققـان تكـاملاً مشـتركاً برتبـة (١ , ١) ومتجـه مكامل $\{1,-1\}$، فلابد أن تكون التوليفة :

$$L = X_t - Y_t$$

مستقرة أي I(٠).

الآن:

$$X_t - Y_t = 0.65X_{t-1} - 0.35X_{t-1} + 0.35Y_{t-1} - 0.65Y_{t-1} + e^x_t - e^y_t$$
$$= 0.3X_{t-1} - 0.3Y_{t-1} + e^x_t - e^y_t$$
$$= 0.3Z + (e^x_t - e^y_t)$$

حيث $Z = X_{t-1} - Y_{t-1}$. وبما أن معامل الانحدار الذاتي عددياً أقل من ١ فإن هذه العملية I(٠).

كذلك بما أن كل مـن X_t و Y_t متكاملـة برتبـة "١" أي I(١) وهنـاك متجـه $\underline{\beta} = \{1,-1\}$ بحيث التوليفة الخطيـة $X_t - Y_t$ متكاملـة برتبـة "٠" أي I(٠) إذن X_t و Y_t تحققان تكاملاً مشتركاً CI(١ , ١).

٧ , ٥ , ٢ النماذج المصححة للتوازن Equilibrium correction model

يرتبط مفهوم التكامل المشترك بشكل وثيق بنماذج تربط بـين السـلوك قصـير المدى والسلوك طويـل المـدى في المـتغيرات الاقتصـادية ، وهـى مـا يعـرف بالنمـاذج

المصححة للتوازن وأحيانا تسمي النماذج المصححة للخطأ (**Error correction model**) ويرمز لها اختصاراً ب**ECM**.

لإعطاء فكرة مبسطة عن هذه النماذج نأخذ النموذجين :

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \omega_0 X_t + \omega_1 X_{t-1} + e_t \qquad \dots (٧,٣)$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t \qquad \dots (٧,٤)$$

حيث ال X وال Y في شكل لوغارثمات و e_t ضجة بيضاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين σ^2 .

النموذج (٧,٣) نموذج حركي (أي بابطاءات) **dynamic model** تمثل فيه ω_0 مثلاً التغير المتوقع في Y_t عند إبقاء تأثير X_{t-1} و Y_{t-1} محدداً. فهي بالتالي تمثل التغير قصير الأجل في Y_t الناتج عن تغير في X_t . يوصف مثل هذا النموذج بأنه نموذج قصير الأجل **short –run model** لأنه يمثل سلوك المتغيرات في المدى القصير.

أما النموذج (٧,٤) فيمثل سلوك المتغيرات في المدى الطويل عندما تصل العلاقة بين **X** و**Y** لحالة توازن.

النموذج (٧,٣) يوضح سلوك المتغيرات في المدى القصير ومدى اعتمادها على ابطاءات سابقة ، ولكنه بسبب احتوائه على متغيرات بابطاءات قد يعاني من مشكلة الاشتراك الخطي **multicollinearity** بكل مشاكلها وانعكاساتها على المقدرات واختبارات الفروض ، كما أنه قد يتضمن متغيرات غير مستقرة ، يؤدي الاتجاه العام فيها لارتباط وانحدار زائف بينها. أما النموذج (٧,٤) فهو بدورة لا يظهر السلوك قصير المدى في المتغيرات (مثلاً التعديلات على Y_t الناتجة عن الابطاءات في Y_t و X_t)

أفرض الآن أننا أجرينا إعادة معلمة للنموذج (٧,٣) على الشكل التالي :

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi_0 - Y_{t-1} + \phi_1 Y_{t-1} + \omega_0 X_t - \omega_0 X_{t-1} + \omega_0 X_{t-1} + \omega_1 X_{t-1} + e_t$$

$$\nabla Y_t = \omega_0 \nabla X_t + \phi_0 - (1-\phi_1) Y_{t-1} + (\omega_0 + \omega_1) X_{t-1} + e_t$$

$$=\omega_0\nabla X_t+(1-\phi_1)\frac{\phi_0}{(1-\phi_1)}-(1-\phi_1)Y_{t-1}+(1-\phi_1)\frac{(\omega_0+\omega_1)}{1-\phi_1}X_{t-1}+e_t$$

$$=\omega_0\nabla X_t+(1-\phi_1)\beta_0-(1-\phi_1)Y_{t-1}+(1-\phi_1)\beta_1X_{t-1}+e_t$$

... (٧,٥)

$$\nabla Y_t=\omega_0\nabla X_t-(1-\phi_1)\left[Y_{t-1}-\beta_0-\beta_1X_{t-1}\right]+e_t$$

المقدار داخل القوس المربع يمثل الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر في (٧,٤) وهو بالتالي يمثل الانحراف عن حالة الاتزان (في المدى الطويل) بينما الحد الأول يمثل السلوك في المدى القريب. (بافتراض أن X وY تحققان تكاملاً مشتركاً). فالنموذج (٧,٥) إذن يحتوي الآثار قصيرة المدى وبعيدة المدى معاً بينما تعطى $(1-\phi_1)$ فكرة عن المدى أو السرعة التي تتغير بها y_t في حالة عدم الاتزان أي عندما $y_{t+1}-\beta_0-\beta_1X_{t-1}\neq 0$.

لهذا يسمي النموذج (٧,٥) نموذج مصحح للتوازن (أو للخطأ). ومن المزايا الأخرى لهذا النموذج أن كل المتغيرات فيه (بافتراض التكامل المشترك) تكون مستقرة وبهذا يمكن تطبيق طرق الانحدار بما فيها من اختبارات فروض وتقدير بأمان.

وتجدر الإشارة إلي أنه يمكن تصميم النموذج **ECM** لحالة عدة إبطاءات كما يمكن تعميمه لحالة تعدد المتغيرات.

٧,٥,٣ نموذج آرش وامتداداته The ARCH model & extensions

في السلاسل الزمنية المالية مثل تلك التي تعطى أسعار الأسهم ، لوحظ أن أى تغير كبير في السعر يعقبه تقلب (تباين) كبير فيه ، قد يكون في الاتجاهين ، ويستمر لفترة. كذلك فإن التغير الصغير في السعر تعقبه فترة تقلبات صغيرة. هذا يعنى أن التباين في العملية المولدة للسعر يعتمد على حجم السعر السابق. هذه هي الخاصية التي يشار إليها باختلاف التباينات الشرطي **Conditional heteroscedasticity**

في جميع النماذج السابقة كنا حين نتحدث عن ثبات التباين (أو المتوسط) فإننا نعني الثبات في المدى الطويل (عندما $t\to\infty$). هذا التباين غير المشروط بتوفر

معلومات معينة في الأزمنة قبل **t** يسمى التباين غير الشرطى **Unconditional variance**.

أما التباين في الزمن **t** والمشروط بمعرفة القيم حتى الزمن $t-1$ فيسمى التباين الشرطي **Conditional variance**. وتعريفنا للاستقرار سابقاً كان يستخدم التباين غير الشرطي. لهذا فإن التباين الشرطي قد يكون غير ثابت ولكن السلسلة مستقرة ما دام التباين غير الشرطي ثابت.

لإيجاد نموذج يستوعب التغيرات الوقتية في التباين أي يسمح للتباينات الشرطية أن تعتمد على الزمن وفي نفس الوقت للتباين غير الشرطي أن يظل ثابتاً طور انجل (١٩٨٢) **Engle** ما عرف بنموذج آرش (**ARCH**) وهو اختصار لاختلاف تباين شرطي ذو انحدار ذاتي **Conditional heteroscedasticity Autoregressive**.

ولتوضيح نموذج آرش في ابسط صورة وهو آرش ذو الرتبة "١" أي **ARCH(١)** نفترض أن لدينا النموذج **AR(١)**:

$$\tilde{Y}_t = \phi \tilde{Y}_{t-1} + e_t \qquad \ldots (٧,٦)$$

حيث ال e_t متغيراً عشوائية مستقلة يتبع كل منها نفس التوزيع الذي وسطه الحسابي ٠ وتباينه σ^2. أيضاً نفرض أن $|\phi|<1$.

ليمكن لهذا النموذج أن يتضمن التباين الشرطي أقترح انجل (١٩٨٢) تعديل النموذج ليصبح

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{Y}_t = \phi \tilde{Y}_{t-1} + e_t \quad (٧,٧.\mathbf{a}) \\ &e_t = \in_t \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)} \quad (٧,٧.\mathbf{b}) \end{aligned}\right\} \ldots (٧,٧)$$

وحيث $\in_t$ مستقلة ولها نفس التوزيع بمتوسط صفر وتباين ١ ، وحيث $\alpha_0 > 0$ و$0 < \alpha_1 < 1$. الجديد في هذا النموذج أن التباين الشرطي في أي زمن **t** معبر عنه

كدالة في مربع الخطأ في الزمن السابق أي e_{t-1}^2. هذا يسمح بإبراز التغير العنيف في التباين في الزمن $t-1$ في التباين الشرطي. كذلك فإن القيود على α_0 و α_1 وضعت لتفادي الحصول على تباين سالب.

في هذا النموذج نلاحظ أن متوسط e_t غير الشرطي ثابت لأن

$$E(e_t) = E\left\{ \in_t \ (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= E(\in_t) E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

لأن ال $\in_t$ مستقلة و $E(\in_t) = 0$.

كذلك فإن التباين غير الشرطي ثابت إذ بما أن $E(e_t) = 0$ فإن $V(e) = E(e_t^2)$ وبتعويض قيمة e_t من (٧,٧) وتذكر أن ال $\in$ مستقلة وتباينها ١:

$$\begin{aligned} V(e) &= E(\in_t^2) E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2) \\ &= E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(e_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 E(e_{t-2}^2)) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 E(e_{t-3}^2)) \\ &= \alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_1{}^2 + \alpha_0\alpha_1{}^3 + \dots \\ &= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \end{aligned}$$

من مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية بما أن $|\alpha_1| < 1$.

وهكذا نرى أن كل من المتوسط غير الشرطي والتباين غير الشرطي للنمـوذج (٧,٧) ثابت مع الزمن.

الآن إذا رمزنا للمعلومات المناسبة المتوفرة حتى الزمن $t-1$ ب I_{t-1} فـإن المتوسط الشرطي (أي علماً بالقيم حتى الزمن $t-1$) ل e_t:

$$E(e_t / I_{t-1}) = E(\in_t (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} / I_{t-1})$$
$$= E(\in_t / I_{t-1}) E((\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} / I_{t-1})$$

بما أن ال e_t مستقلة. كذلك إذا علمنا I_{t-1} وبالتالي قيمة e_{t-1}^2 فإن الحد في القوس الأخير يكون ثابتاً ، وبالتالي

$$E(e_t / I_{t-1}) = E(\in_t / I_{t-1}) = 0$$

من ناحية أخري فإن التباين الشرطي يكون (بما أن $E(e_t / I_{t-1}) = 0$):

...(٧,٨)

$$V(e_t / I_{t-1}) = E(e_t^2 / I_{t-1}) = E(\in_t^2 / I_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 + e_{t-1}^2$$

لأن تباين $\in_t$ واحد. هذا يعني أن التباين الشرطي غـير ثابـت ويعتمـد علـى الـزمن. لاحظ أن التباين الشرطي ل $\widetilde{Y}_t$ يساوي التباين الشـرطي ل e_t لكـن المتوسـط يكـون $\phi \widetilde{Y}_{t-1}$. بما أن e_t لها تباين شرطي (من ٧,٨) غير ثابت ويأخذ الشكل :

$$V(e_t / I_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

وهو في الواقع عملية انحدار ذاتي برتبة "١" فإن e_t تمثل اختلاف تباين شـرطي ذو انحدار ذاتي برتبة "١" أي **ARCH(١)** . وبما أن $\widetilde{Y}_t$ لها نفس التباين الشرطي مثـل ذلك الذي ل e_t فإنها أيضاً تمثل عملية **ARCH(١)** .

ويمكن تعميم ARCH(١) في اتجاهات مختلفة. مثلاً نموذج انحدار ذاتي برتبة P بخطأ آرش برتبة ARCH(q))q يأخذ الشكل :

$$\tilde{Y}_t = \gamma + \sum_{i=0}^{P} \phi_i \tilde{Y}_{t-1} + e_t \quad \text{...(٧,٨a)}$$

...(٧,٨)

$$e_t = \in_t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{...(٧,٨b)}$$

حيث ال $\in_t$ مستقلة ولكل منها متوسط "٠" وتباين ١. كذلك نموذج انحدار متعدد برتبة k بخطأ آرش برتبة q :

$$\tilde{Y}_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \tilde{X}_{it} + e_t \quad \text{...(٧,٩a)}$$

...(٧,٩)

$$e_t = \in_t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{...(٧,٩b)}$$

كما يمكن تعميم آرش لحالة المتغيرات المتعددة .

وترجع أهمية نموذج آرش إلى أنه يمكن استخدامه للتنبؤ بالتقلبات (الأخطار) المستقبلية ، مما اكسبه جاذبية وأدى لشيوع استخدامه.

ومنذ أن عرف انجل بنموذج آرش عام ١٩٨٢ ، حدثت إضافات متعددة إليه على أيدي عدد من الباحثين. فقد عمم بوليرسلف (١٩٨٦) **Bollerslev** نموذج آرش ليشمل إضافة إبطاءات للتباين الشرطي نفسه في النموذج. فإذا كان المتغير التابع $\tilde{Y}_t$ يمثل ب(٧,٩a) فإن بوليرسلف عرف النموذج التالي ل e_t:

$$e_t = \in_t \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{P} \beta_i h_{t-i}\right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث h_t التباين الشرطي في الزمن t.وحيث ال $\in_t$ مستقلة ولكل منها نفس التوزيـــــــــع بمتوســــــــــط صـــــــــفر وتبــــــــاين ١. أيضــــــــــاً $\beta_j \geq 0$، $i = 1,...,q$، $\alpha_i \geq 0$، $\alpha_0 > 0$، $q > 0$، $P \geq 0$ و $j = 1,...,P$. يســـمي هـــذا النمـــوذج نمـــوذج آرش المعمـــم ARCH Generalized ويرمز له اختصاراً بـGARCH(p,q) أو قارش.

وتتوفر عدة برامج لتقدير المعالم في آرش وقـارش تسـتخدم طريقـة الإمكـان الأكـبر حيـث يـتم تعظـيم دالـة الإمكـان عـددياً. ومـن هـذه الـبرامج Pc Give وG@Rch.

٧,٦ السلاسل الزمنية غير الخطية Nonlinear Time-series Models

الشكل العام لنموذج انحدار ذاتي غير خطـي برتبـة P ويشـار إليـه اختصـاراً NLAR(P) هو :

$$\tilde{Y}_t = f(\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{Y}_{t-2}, ..., \tilde{Y}_{t-P}) + e_t \quad ...(٧,١٠)$$

حيث $f(\cdot)$ دالة بشكل ما في القيم السابقة لـY.

المشكلة الرئيسية في تقدير مثل هذا النموذج هـو أن شـكل الدالـة $f(\cdot)$ عـاده غـير معروف. إحدى الطرق لمعالجة ذلك هو استخدام مفكوك تيلر للحصول علـى تقريـب للشكل المجهول للدالة. تقريب تيلر لـ(٧,١٠) يأخذ الشكل

$$Y_t = a_o + \sum_{i=1}^{p} a_i Y_{t-i} + \sum_{i}^{p} \sum_{j}^{p} \sum_{k}^{r} \sum_{l}^{s} a_{ijkl} Y_{t-i}^{k} Y_{t-j}^{l} + e_t$$

وكمثال لذلك الانحدار الذاتي غير الخطي برتبة "١" أي NLAR(١) :

$$y_t = f(y_{t-1}) + e_t$$

والذي يمكن إعادة معلمته ليصبح :

$$y_t = a_1(y_{t-1}).y_{t-1} + e_t \quad ...(٧,١١)$$

نلاحظ أن (٧,١١) تشبه عملية **AR(١)** من حيث الشكل باستثناء أن a_1 سمح لها بأن تكون دالة في y_{t-1} .

٧,٧ تصميم نظم التحكم Design of control systems

نختم هذا الباب بمجال هام وذو طبيعة متميزة تطبق فيه طرق تحليل السلاسل الزمنية وهو تصميم نظم التحكم ، والذي يكون الهدف من ورائه تصميم نظام تحكم يؤدي لأن يكون مخرج عملية ما منحرف عن الهدف المحدد بأقل درجة ممكنة.

ففي كثير من النظم ، مثلاً في الهندسة الصناعية ، يكون هناك مدخل (مادة معينه مثلاً) ومخرج ناتج عنه (منتج معين مثلاً). ويكون مطلوباً أن يكون المخرج (المنتج) محققاً لصفه مستهدفة معينة. لكن لأسباب مختلفة يتعرض المدخل لتغيرات **disturbances** تجعل المخرج تتقلب قيمته حول القيمة الهدف. فإذا كان من الممكن قياس هذه التغيرات في المدخل (في فترات زمنية متتالية ومتساوية) ، وإذا كان هناك متغير آخر – متغير تحكم **Control variable** – يؤثر في المخرج ويمكننا التحكم فيه ، فمن الطبيعي أن نعتقد أنه يمكن تصميم نظام تحكم يمكننا من أن نجرى – بمجرد مشاهدة مقدار التغير في المدخل – تعديلات في متغير التحكم تعوض عن أو تلغي (أو على الأصح تقلل) من أثر التغيير في المدخل . هذا الإجراء يسمى تحكم بالتغذية للأمام **feed forward control** .

في أحيان أخرى لا نعرف مصدر التغير أو لا يتيسر قياسه. في هذه الحالة نعتمد فقط على مدى انحراف قيمة المخرج عن الهدف في حساب التعديلات التي ينبغي إجرائها في متغير التحكم. يسمى هذا النوع من التحكم تحكم بالتغذية للخلف **feed backward control** . في حالات أخرى يستخدم الاثنان معاً : تحكم بالتغذية للأمام للتعويض عن آثار التغيرات في المدخل التي يمكن قياسها وتحكم بالتغذية للخلف للتعويض عن التغيرات التي لا يمكن قياسها .يسمى هذا **feed back** **feed forward –control** .

وتقوم هذه النظم على بناء نماذج – دوال تحويلية – تربط بين كل من سلسلة المدخل وسلسلة متغير التحكم وسلسلة المخرج. ومن ثم حساب معادلة التحكم **Control equation** التي تعطى أقل انحرافات عن الهدف في دالة المخرج – إن نفذت – وفق معيار مناسب عادة متوسط مربعات الخطأ الذي يقيس الخطأ الكلي.

ويتم تنفيذ خطوات التحكم بشكل أو توماتيكى يشبه طرق التحكم في الترموستات ، أو الطيار الآلي أو الصواريخ الموجهة بالأقمار الصناعية. فمثلاً قد يتم التحكم من خلال الحاسب الآلي حيث يقوم الحاسب بحساب الفعل الذي تقتضيه معادلة التحكم ومن ثم ينفذ تلقائياً من خلال بعض محولات الطاقة المناسبة التي تقوم بفتح وقفل صمامات تؤدي لتعديل متغير المخرج. وهناك وسائل تحكم آلية وكهربائية أخرى تستخدم أحياناً في تنفيذ ما تتطلبه معادلة التحكم.

في هذا الفصل نتعرض بإيجاز لهذه الطرق. ويمكن لتفاصيل أعمق الرجوع لبوكس – جنكنيز (**Box –Jenkins** ١٩٧٦).

١, ٧, ٧ التحكم بالتغذية للأمام

سنستخدم للتوضيح المثال الذي أورده بوكس وجنكينز . فنفترض أنه في صناعة مركب كيميائي معين يعتقد أن لزوجة المنتج Y_t تتأثر جزئياً بالتغيرات في تركيز المدخل Z_t، حيث يمكن مشاهدة وقياس Z_t لكن لا يمكن التحكم فيها. هناك متغير آخر (متغير التحكم) هو ضغط البخار X_t يمكن قياسه والتحكم فيه وهو يؤثر في Y_t. مجموع الآثار الأخرى للمتغيرات غير Z_t و X_t التى تؤثر في Y_t نرمز لها ب N_t.

نفترض أيضاً أن كل من **Z،X،Y** و**N** قد أخذت كانحراف من قيم مرجعية. ويقصد بالقيم المرجعية القيم التي إذا حققتها المتغيرات يكون المنتج محققاً للهدف تماماً دون أي انحراف عنه. وواضح أنه إذا كانت قيم المتغيرات في الزمن **t** مثلاً هى القيم المرجعية فإن $N_t = 0$ ، $X_t = 0$، $Z_t = 0$ و $Y_t = 0$.

نفترض أيضاً أن المشاهدات في جميع المتغيرات تؤخذ في فترات زمنية متتالية ومتساوية الطول.

متغير المدخل Z يفترض أنه يرتبط بمتغير المخرج Y من خلال الدالة التحويلية :

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b Z_t \qquad \ldots (٧,١٢)$$

بمجرد أن تتوفر المشاهدات $Z_t, Z_{t-1}, \ldots$ تجرى تعديلات على متغير التحكم X في الأزمنة $t, t-1, \ldots$. وبما أن التعديل يجرى في أزمنة متقطعة فإن المنتج يكون في شكل قفزات ، لهذا نرمز لقيمة X في الفترة t الي $t+1$ ب X_{t+}.

من ناحية أخرى ، نفرض أن الدالة التحويلية التي تربط بين X_{t+} و Y_t تأخذ الشكل :

$$Y_t = \frac{L_2(B)}{L_1(B)} B^{f+1} X_{t+} \qquad \ldots (٧,١٣)$$

في كل من (٧,١٢) و (٧,١٣) $\omega(B)$، $\delta(B)$، $L_1(B)$، $L_2(B)$ كثيرات حدود في B بينما b و$f+1$ الفترة التي تنفضي قبل تـأثير Z_t علـى Y_t وX_{t+} على Y_t بالترتيب.

الآن إذا لم يجر أي تحكم (أي بقيت $X_t = 0$ لكل t) فإن الخطأ الكلي في المخرج سيتكون من أثر Z_t كما توضحه (٧,١٢) وبقية الأخطاء التي رمزنا لها ب N_t. في هذه الحالة يكون الخطأ :

$$e_t = N_t + \delta^{-1}(B)\omega(B) Z_{t-b} \qquad \ldots (٧,١٤)$$

لكننا نستطيع من خلال التعديل في X باستخدام (٧,١٣) التأثير في الجزء المقاس من الخطأ والذي يمثله الحد الثاني بالطرف الأيمن من (٧,١٤). ولرؤية كيف يتم ذلك نلاحظ أولاً أنه في الزمن t يكون الخطأ الكلي الناتج عن المؤثر Z (بما أن Z تستغرق فترة b لتؤثر في Y) هو (من (٧,١٢)):

$$\frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_{t-b}$$

بينما تأثير التعويض X هو (من (٧,١٣)) :

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t-(f+1)+}$$

وبالتالي نستطيع أن نلغي تأثير Z_t إذا جعلنا تأثير متغير التحكم X مساوياً لسالب تأثير Z أي إذا وضعنا

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t-(f+1)+} = -\delta^{-1}(B)\omega(B)Z_{t-b}$$

والذي يصبح إذا رفعنا المؤشر في الطرفين بمقدار $f+1$:

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t+} = -\frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_{t-b+f+1} \qquad \text{... (٧,١٥)}$$

المعادلة (٧,١٥) هي معادلة التحكم التي تحدد لنا الإجراء الذي يتعين علينا اتخاذه في الزمن t للتعويض أو لإزالة الانحراف عن الهدف $Y_t = 0$ الذي تتسبب فيه Z.

عند تنفيذ إجراء التحكم الذي تتطلبه (٧,١٥) ننتبه إلى أنه في الزمن t - الزمن الذي نجري فيه التعديل - ستكون $Z_{t+1}, Z_{t+2}, ...$ غير متوفرة.

لهذا ليتسنى لنا تطبيق (٧,١٥) يجب أن يسبق تأثير X (علىY) الذي نطلبه تأثير Z. بمعني آخر يجب أن يتحقق أن الفترة التي تبدأ فيها X في التأثير على Y لا تزيد عن تلك التي تبدأ فيها Z في التأثير عليها أي يجب أن يكون :

$$b-(f+1) \geq 0$$

في هذه الحالة تكون لدينا جميع قيم Z التي تتطلبها معادلة التحكم ، ويكون التعديل المطلوب في الزمن t هو :

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)\omega(B)}{L_2(B)\delta(B)} Z_{t-b+(f+1)} \qquad \text{... (٧,١٦)}$$

ويمكن أيضاً بدلاً من أن يكون التعـديل بدلالـة X_{t+} نفسـها يكـون بدلالـة التغير فيهـا أي بدلالـة $x_t = X_{t+} - X_{t-1+}$. في هـذه الحالـة تكـون (٧,١٦) بالشكل:

$$x_t = -\frac{L_1(B)\omega(B)}{L_2(B)\delta(B)}\left\{Z_{t-b+(f+1)} - Z_{t-1-b+f+1}\right\} \quad \dots (٧,١٧)$$

لكن ماذا إذا كانت $b-(f+1)<0$ ؟ في هذه الحالـة يصـل تـأثير Z للمنتج قبل أن يتمكن أثر متغير التحكم X من الوصول إليه. وتكون هناك لذلك قيم لZ مطلوبة في (٧,١٦) لم تشاهد بعد. وعليه لا يمكن تطبيق معادلة التحكم بشـكلها في (٧,١٦).

في هذه الحالة يمكن استخدام طريقة تعتمـد علـى تنبـؤات بقـيم Z المسـتقبلية (بوكس و جنكيز **Box –Jenkeis** ،١٩٧٦) هذه الطريقة كما يلي:

نضع الطرف الأيمن من (٧,١٢) باستثناء مشغل الإزاحة B^b:

$$Z'_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_t \quad \dots. (٧,١٨)$$

كدالة خطية لا نهائية في الأخطاء e_t والـتي يفـترض أن لكـل منهـا متوسـط صفر وتباين σ_e^2 ، أي نضع :

$$Z'_t = \left\{1 + \sum_{j+1_{Z'}}^{\infty} \Psi_j B^j\right\} e_t$$

إذا رمزنا للتنبؤ في الزمن t بقيمة Z' التي تقع L فترة الأمام ب $\hat{Z}_t{}'(L)$ ، فإن القيمة الفعلية ل Z' التي تقع L فترة للأمام من الزمن t أي Z'_{t+L} تكون بالطبع مجموع التنبؤ مضافاً إليه خطأه أي :

$$Z'_{t+L} = \hat{Z}'_t(L) + \hat{e}'_t(L)$$

حيث $\hat{e}'_t(L)$ خطأ التنبؤ في الزمن $t+L$. وبالتالي فإن قيمة Z' الفعلية في الزمن $t-b+f+t$ تكون

$$Z'_{t-b+f+1} = \hat{Z}_t{}'(f+1-b) + \hat{e}'_t(f+1-b)$$

وبتعويض هذه القيمة في (٧,١٦) بدلاً عن

$$\frac{\omega(B)}{\delta(B)} Z_{t+f+1-b}$$

تصبح معادلة التحكم :

... (٧,١٩)

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)}\left\{\hat{Z}'_t(f+1-b) + \hat{e}'_t(f+1-b)\right\}$$

لكن بما أن $b < f+1$ فإن جميع الأخطاء e في الحد الثاني داخل القوس تكون غير موجودة في الزمن t ، كما أنها غير مرتبطة بأي متغير معروف في الزمن t ، لهذا لا يمكن التنبؤ بها. لهذا تحذف هذه الأخطاء أي تعتبر جميعها أصفاراً . بالتالي تصبح معادلة التحكم

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)}\hat{Z}'_t(f+1-b) \quad ... (٧,٢٠)$$

أو إذا أردنا صيغة بدلالة التغير :

$$x_t = -\frac{L_1(B)}{L_2(B)}\left(\hat{Z}'_t(f+1-b) - \hat{Z}'_{t-1}(f+1-b)\right)$$

٧,٧,٢ التحكم بالتغذية للخلف

في هذه الحالة الدليل الوحيد المشاهد لوجود أخطاء في المنتج هو انحرافه عن الهدف. ولهذا يكون التحكم باستخدام هذا الانحراف.

تمثل N_t في هذه الحالة مجموع الآثار على المنتج التي أدت لانحرافه عن الهدف. بطريقة أخري هي الانحراف عن الهدف الذي سنشاهده في الزمن t إذا لم يحدث إجراء تحكم.

نفرض أنه يمكن تمثيل N_t بالنموذج :

$$N_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)e_t = \left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j\right\} e_t \quad \ldots (٧,٢١)$$

حيث e_t ضجة بيضاء (أخطاء).

الدالة التحويلية التي تربط متغير التحكم X ومتغير المنتج Y كما في (٧,١٣) هي :

$$Y_t = \frac{L_2(B)}{L_1(B)} B^{f+1} X_{t+} \quad \ldots (٧,٢٢)$$

الأثر الكلي للمؤثرات (Z وغيرها) يساوي N_t .

والأثر الكلي لمتغير التحكم X يساوي الطرف الأيمن من (٧,٢٢). وبالتالي فإن أثر المؤثرات سيقضي عليه إذا وضعنا

$$\frac{L_2(B)}{L_1(B)} B^{f+1} X_{t+} = -N_t \quad \text{أو} \quad \frac{L_2(B)}{L_1(B)} X_{t-(f+1)} = -N_t$$

أو برفع المؤشرات بمقدار $f+1$:

$$X_{t+} = \frac{L_1(B)}{L_2(B)} N_{t+f+1}$$

ولكن الآثار N لا يمكن مشاهدتها عند الزمن t لأن $f+1>0$. ولكن من النموذج (٧,٢١) وباستخدام الأخطاء السابقة يمكن إيجاد التنبؤ من الزمن t للخطأ في الزمن الذي يبعد L وحدة زمنية للأمام أي إيجاد $\hat{N}_t(L)$. وبما أن التنبؤ بN_{t+f+1} هو $\hat{N}_t(f+1)$ فإن معادلة التحكم تكون:

$$X_{t+} = \frac{L_1(B)}{L_2(B)} \hat{N}_t(f+1)$$

أو بدلالة المتغير $$x_{t+} = \frac{L_1(B)}{L_2(B)} \left\{ \hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1) \right\}$$

يمكن التعميم بتصميم تحكم يتضمن تحكم للأمام وتحكم للخلف في نفس الوقت. كما يمكن تعميم النتائج السابقة لتشمل التحكم في الحالة التي يكون لدينا فيها عدد من سلاسل المدخلات.

المراجع :

١. Bartlett, M.S.(١٩٤٦) , "On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time series" J.of the Royal stat . Society , Series B,٨,P.٢٧.

٢. Bollerslev T. (١٩٨٦). "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity" , Journal of Econometrics ٣١ , ٢٠٧- ٣٢٧.

٣. Box G.E.P & Jenkins , G.M. (١٩٧٦). "Time – Series Analysis: Forecasting and Control, "Revised" Holden -Day series .

٤. Box, GEP & Tiao G.C. (١٩٧٥) Intervention analysis with applications to Economic and Environmental Problems. Journal of the American Statistical Association, ٧٠ No.٧٤٩,PP٧٠- ٧٩.

٥. Bowerman B. & O'Connell R.(١٩٩٣) "Forecasting and Time Series- An Applied Approach"Duxbury Thomson Learity.

٦. Chow, W.M. "Adaptive Control of the Exponential Smoothing Constant" (١٩٦٥) Journal of Industrial Engineering,١٦, No٥.

٧. Dickey , D.A. & Fuller, W.A. (١٩٧٩). "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root". Journal of the American Statistical Association , ٧٤, PP٤٢٧- ٤٣١.

٨. Engle, R.F. ١٩٨٢, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdam inflation", Econometrics ٥٠, ٩٨٧- ١٠٠٧.

٩. Engles R.F. & Granger C.W.J. (١٩٨٧) ."Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing. Econometrica, ٥٥, ٢٥١–٢٧٦.

١٠. Euders W. " Applied Econometrics time series " (٢٠٠٤). John Wiley & sons.

١١. Harris, R. and Sollis, R. (٢٠٠٥), "Applied Time Series Modelling and Forecasting " John Wiley & sons.

١٢. Helmer R.M and Johansson J .(١٩٧٧) "An Extension of the Box-Jenkins Transfer Function Analysis with an Application to the Advertising – Sales relationship " Journal of Marketing Research , ١٤,May,PP٢٢٧- ٣٩.

١٣. Holt, C. C. (١٩٥٧) "Forecasting Trends and Seasonals by exponentially weighted moving averages" O .NR. O.N.R. Memorandum No.٥٢, Carnegie Institute of Technology.

١٤. Makridakis S., Wheelwright s., and McGee, V. (١٩٨٣): "Forecasting: Methods and Applications" John Wiley

١٥. Montgomery D.C, and Weatherly G.(١٩٨٠) " Modeling and Forecasting Time series using Transfer Function & Intervention Methods "AIIE Transactions , December , PP ٢٨٩- ٣٠٧.

١٦. Phillips, P.C.B. and Perron P. (١٩٨٨) "Testing for unit root in time series regression". Biometrika , ٧٥, ٣٣٥—٣٤٦.

١٧. Sargan, J. D. and Bhargava, A. (١٩٨٣). "Testing Residuals from Least Squares. regression for being generated by the Gaussian random walk', "Econometrica ٥١, ١٦٥٣- ١٧٤.

١٨. Tukey J.W.(١٩٦١) "Discussion, emphasizing the connection between analysis of variance and spectrum analysis" Technometrics.

١٩. Umstead D.(١٩٧٧) "Forecasting stock market prices " The Journal of Finance , ٣٢,NO.٢,May PP٤٢٧- ٤.

٢٠. Winters, P. R. (١٩٦٠) "Forecasting sales by exponentially weighted moving averages" Management science. ٦ PP٣٢٤.

٢١. Yule, G.U. (١٩٢٧) " On a method of investigating the periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers" Phil Trans,A.٢٢٦- ٢٦٧.