

بالتالي فإن طيف القوة للعملية AR(p) يكون :

$$p(f) = 2\sigma_e^2 \phi^{-1}(B) \phi^{-1}(B^{-1})$$

$$= \frac{2\sigma_e^2}{\phi(e^{-i2\pi f}) \phi(e^{i2\pi f})} \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \quad \dots (٥, ١٨)$$

ولأن نماذج الانحدار الذاتي ذات الرتبة ١ و ٢ هي الأكثر أهمية في الواقع فستتناول خصائصها بشكل أكثر تفصيلاً في المثالين التاليين.
مثال (٥, ١)

لعملية الانحدار الذاتي برتبة ١ :

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + e_t$$

حيث $-1 < \phi_1 < 1$ كشرط للاستقرار أوجد :

(i) دالة الارتباط الذاتي .

(ii) التباين .

(iii) طيف القوة .

(١) في حالة $p = 1$ تصبح (٥, ١٠) مع ملاحظة أن $I_k = 0$ ما لم تكن $k = 0$:

$$p_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad k > 0 \quad \dots (٥, ١٩)$$

هذه معادلة فروق متجانسة من الدرجة الأولى بمعامل ثابت. حلها نضع

$$\rho_k = \beta^k$$

$$\beta^k = \phi_1 \beta^{k-1} \quad \text{إذن}$$

$$\beta^{k-1}(\beta - \phi_1) = 0 \quad \text{أو}$$

$$\beta = \phi_1 \quad \therefore$$

وبالتالي الحل العام ل (٥, ١٩) هو

$$\rho_k = c\phi_1^k$$

وباستخدام القيد $\rho_0 = 1$ نجد. $c = 1$ أى أن الحل الخاص هو

$$\rho_k = \phi_1^k \quad k \geq 0$$

وهى دالة الارتباط الذاتي للعملية $AR(1)$.

(ii) التباين

إذا وضعنا $k = 0$ في (٥, ٩) وتذكرنا أن $\gamma_k = \gamma_{-k}$ نجد (مع وضع الملاحظة بعد (٥, ٩) في الاعتبار) :

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \dots + \phi_p\gamma_p + \sigma_e^2$$

وبقسمة الطرفين على γ_0 وهو تباين العملية $\tilde{Y}$ أى σ_y^2 بعد تحويل كل شيء عدا σ_e^2 للطرف الأيسر :

$$1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \dots - \phi_p\rho_p = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}$$

أى أن التباين للعملية $AR(p)$:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \dots - \phi_p\rho_p} \quad (٥, ٢٠)$$

وبالتالي التباين في العملية $AR(1)$ (بوضع $\rho = 1$) :

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1\rho_1}$$

(iii) الطيف :

من (٥, ١٨) وبوضع $\phi(B) = 1 - \phi_1 B$ نجد طيف القوة

لعملية (١)AR:

$$P(f) = \frac{2\sigma_e^2}{(1 - \phi_1 e^{-i2\pi f})(1 - \phi_1 e^{i2\pi f})}$$

$$= \frac{2\sigma_e^2}{1 + \phi_1^2 - \phi(Cos 2\pi f + i \sin 2\pi f e + Cos 2\pi f - i \sin 2\pi f)}$$

$$= \frac{\sigma_e^2}{1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 Cos 2\pi f} \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}$$

مثال (٢, ٥)

لعملية الانحدار الذاتي ذات الرتبة ٢ :

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + e_t$$

حيث (للاستقرار) :

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

(i) أوجد صيغ ل ϕ_1 و ϕ_2 بدلالة ρ_1 و ρ_2 والعكس .

(ii) أوجد التباين .

(iii) أوجد طيف القوة .

(i) من معادلات يول - ووكر (١١, ٥) بأخذ $p = 2$:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

وبحل المعادلتين آنيا ل ϕ_1 و ϕ_2 نحصل بالترتيب على :

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \\ \phi_2 &= \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} \end{aligned} \right\} \dots (٥, ٢١)$$

وإذا عكسنا الأمر وحللنا المعادلتين ل ρ_1 و ρ_2 :

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \text{ و } \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \dots (٥, ٢١)$$

(ii) من (٥, ٢٠) بوضع $p = 2$ نجد التباين للعملية $AR(٢)$:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi_1\rho_1-\rho_2\phi_2}$$

(iii) من (٥, ١٨) بأخذ

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

$$P(f) = \frac{2\sigma_e^2}{\left(1 - \phi_1 e^{-i2\pi f} - \phi_2 e^{-i4\pi f}\right) \left(1 - \phi_1 e^{i2\pi f} - \phi_2 e^{i4\pi f}\right)}$$

٥, ٦ عملية المتوسط المتحرك The Moving Average Process

رأينا في (٥, ١٢) والمناقشة التي سبقتها أنه يمكن دائما كتابة عملية الانحدار

الذاتي في شكل سلسلة لا متناهية في الضجة البيضاء e_t السابقة ، حيث ال e'_S

متغيرات عشوائية مستقلة كل منها بمتوسط ٠ وتباين σ_e^2 .

فإذا عبرنا عن Y_t بدلالة قيم e_t حتى إبطاء q نحصل على :

$$\tilde{Y}_t = e_t + \theta'_1 e_{t-1} + \theta'_2 e_{t-2} + \dots + \theta'_q e_{t-q}$$

أو نلتزم بالعرف الجاري باستخدام إشارات سالبة :

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad \dots (٥, ٢٣)$$

حيث $\theta_j = -\theta'_j$ لكل j نصل لما يسمى عملية أو نموذج المتوسط المتحرك ذو الرتبة q ويرمز لها بـ $MA(q)$ والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\tilde{Y}_t = \theta(B)e_t$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad \text{حيث}$$

هذا يعني أنه بينما تعبر عملية الانحدار الذاتي ذات الرتبة p عن $\tilde{Y}_t$ بدلالة قيم $\tilde{Y}$ السابقة حتى إبطاء p تعبر عملية المتوسط المتحرك برتبة q عن $\tilde{Y}_t$ بدلالة الهزات e السابقة حتى إبطاء q . لاحظ أن عبارة "متوسط متحرك" المستخدمة هنا لا تشير لمفهوم المتوسط المتحرك الذي مر علينا سابقاً لأن المجموع بالطرف الأيمن لا يمثل متوسطاً إذ أن مجموع الـ $\theta's$ لا يساوي واحد ، بل أن بعضها قد يكون سالباً . أنه مجرد اسم جرى العرف على استخدامه .

نلاحظ أولاً أن أى عملية متوسط متحرك مستقرة مهما كانت قيم المعالم

$\theta_1, \theta_2, \dots$ وستثبت ذلك للعملية ذات الرتبة ١ و التعميم للرتبة q مباشر .

العملية $MA(١)$ يمكن كتابتها بالشكل :

$$Y_t = \mu + e_t - \theta e_{t-1}$$

حيث الـ $e's$ متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها متوسط صفر وتباين σ_e^2

وحيث μ متوسط العملية . لإثبات الاستقرار (الضعيف) يجب أن نثبت أن كل من المتوسط ، التباين والتغاير للعملية لا يعتمد على الزمن t .

أولاً : المتوسط :

$$E(e_t) = 0 \quad \text{بما أن لكل } t \text{ فإن}$$

$$E(Y_t) = \mu + E(e_t) + \theta E(e_{t-1}) = \mu$$

ثانياً: التباين :

بما أن ال $e's$ مستقلة وتباين كل منها σ_e^2 فإن :

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= V(e_t) + V(\theta e_{t-1}) \\ &= \sigma_e^2 + \theta^2 \sigma_e^2 \\ &= (1 + \theta^2) \sigma_e^2 \end{aligned}$$

ثالثاً: التغاير :

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t+1}) &= Cov(\mu + e_t - \theta e_{t-1}, \mu + e_{t+1} - \theta e_t) \\ &= E(e_t - \theta e_{t-1})(e_{t+1} - \theta e_t) - E(e_t - \theta e_{t-1})E(e_{t+1} - \theta e_t) \\ &= E(e_t - \theta e_{t-1})(e_{t+1} - \theta e_t) - 0 \\ &= E(e_t e_{t+1}) - \theta E(e_t^2) - \theta E(e_{t-1} e_{t+1}) + \theta^2 E(e_{t-1} e_t) \\ &= -\theta E(e_t^2) = -\theta \sigma_e^2 \end{aligned}$$

باستخدام $E(e_j) = 0$ لكل j و $E(e_j e_{j'}) = 0$ لكل $j \neq j'$ وتذكر أن μ ثابت لا يضيف للتغاير.

من ناحية أخرى $cov(Y_t, Y_{t+k}) = 0$ لـ $k \geq 2$ لأنه لن تكون هناك

$j = j'$ في المقادير من النوع $E(e_j e_{j'})$ وبالتالي ستساوي جميعها أصفاراً.

وبما أن كل من المتوسط ، التباين والتغاير لا يعتمد على الزمن t وهي بالتالي جميعها ثابتة مع الزمن نستنتج أن العملية $MA(1)$ مستقرة. وتنطبق خاصية الاستقرار على عملية المتوسط المتحرك بأي رتبة. ورغم أن ذلك يتحقق مهما كانت قيم $\theta_1, \dots, \theta_q$ إلا أن هذه المعالم مقيدة بشرط القابلية للعكس **Invertability**.

١, ٦, ٥ قابلية العكس في عملية المتوسط المتحرك

في أحيان كثيرة يكون من الأنسب التعامل مع عملية انحدار ذاتي بدلاً عن

عملية متوسط متحرك. في هذه الحالة نتساءل عما إذا كان من الممكن كتابة عملية المتوسط المتحرك في شكل عملية انحدار ذاتي أي أن تكون e دالة في القيمة الحالية والقيم السابقة ل Y . لنرى متى يمكن تحقيق ذلك نأخذ العملية (١) MA :

$$\tilde{Y}_1 = e_t - \theta e_{t-1} = (1 - \theta B)e_t$$

إذا كتبنا هذه المعادلة بالشكل :

$$(1 - \theta B)^{-1} \tilde{Y}_1 = e_t \quad \dots (٥, ٢٤)$$

واستخدمنا البديهية

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$$

نجد أنه يمكن كتابة الطرف الأيسر من (٥, ٢٤) بالشكل :

$$\tilde{Y}_t + \theta \tilde{Y}_{t-1} + \theta^2 \tilde{Y}_{t-2} + \theta^3 \tilde{Y}_{t-3} + \dots = e_t$$

أي أنه يمكن تحويل عملية المتوسط المتحرك لعملية انحدار ذاتي لا نهائية الرتبة.

ومالم تكن $|\theta| < 1$ فإن قيم $\tilde{Y}_t$ تعتمد على قيم $\tilde{Y}$ السابقة بأوزان تتزايد بشكل لانهائي. لتفادى ذلك ولجعل هذه الحدود تتقارب نضع الشرط $|\theta| < 1$. لهذا عندما تكون $|\theta| < 1$ نقول أن عملية المتوسط المتحرك قابلة للعكس **Invertible**. وفي الحالة العامة ، فإن العملية

$$\tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) e_t$$

تكون قابلة للعكس فقط إذا كانت جميع جذور معادلة كثيرة الحدود المميزة

$$1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \dots - \theta_q z^q = 0$$

أكبر عددياً من ١. أي تقع جميعها خارج دائرة الوحدة.

لاحظ أنه بما أن الحدود في $\theta(B)$ لعملية متوسط متحرك برتبة q محدودة

فليس هناك أي قيود على المعاملات θ لتصبح مستقرة ذلك أن كل من المتوسط ، التباين والتغاير سيكون ثابتاً ومحدوداً. بمعنى آخر عملية المتوسط المتحرك دائماً مستقرة. وبهذا نرى أنه بينما عملية الانحدار الذاتي دائماً قابلة للعكس ولكن قد تكون غير

مستقرة نرى أن عملية المتوسط المتحرك دائماً مستقرة ولكن يمكن أن تكون غير قابلة للعكس.

٢, ٦, ٥ التغير الذاتي والارتباط الذاتي وطيف القوة لعملية المتوسط المتحرك لعملية المتوسط المتحرك برتبة q :

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

التغير الذاتي بإبطاء k لهذه العملية :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{Cov}(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-k}) \\ &= \text{Cov}[(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q})(e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1} - \dots - \theta_q e_{t-k-q})] \\ &= E(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q})(e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1} - \dots - \theta_q e_{t-k-q}) \end{aligned}$$

بتذكر أن $E(e_j) = 0$ لكل j . كذلك بما أن

$$E(e_{t-j} e_{t-j'-k}) = 0 \text{ ما لم يكن } t-j = t-j'-k \text{ أى ما لم يتحقق } j = j' + k \text{ وهى الحالة التي}$$

يكون فيها $E(e_{t-j} e_{t-j'-k}) = \sigma_e^2$ فإن دالة التغير للعملية $\text{MA}(q)$:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sum_{j=0}^q \sum_{j'=0}^q \theta_j \theta_{j'} E(e_{t-j} e_{t-j'-k}) \\ &= \sigma_e^2 \sum_{j'=0}^{q-k} \theta_{j'} \theta_{j'+k} \quad k \leq q \quad \dots (٥, ٢٤) \\ &= 0 \quad k > q \end{aligned}$$

حيث $\theta_0 = 1$. لاحظ أن قيمة j في المجموع الأخير لا يمكن أن تتخطى $q-k$ لأن $j' = j+k$ وأقصى قيمة لـ j' هي q . كذلك بما أن إشارات الـ θ سالبة فإن حاصل الضرب $\theta_j \theta_{j'}$ يكون سالباً فقط في الحالة $\theta_0 \theta_k$ والتي تساوي

$-\theta_k$. لان $\theta_0 = 1$. إذا وضعنا في (٥, ٢٤) $k = 0$ نحصل على التباين للعملية

$$\gamma_0 = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2 \quad \dots (٥, ٢٥)$$

بقسمة (٥, ٢٤) على (٥, ٢٥) نحصل على دالة الارتباط الذاتي للعملية MA(q). كما يلي :

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} \quad k=1,2,\dots,q \dots (5.26)$$

$$= 0 \quad k > q$$

هذا يعني أن دالة الارتباط الذاتي للعملية MA(q) تكون صفراً لـ $k > q$ أو يكون لها قطع cut-off عند الإبطاء q . نقارن هذا الوضع بدالة الارتباط الذاتي الجزئي لعملية الانحدار الذاتي برتبة p والتي رأينا (الفصل الجزئي (٣, ٥, ٣) أن لها قطع عند $k = \rho$. في العملية MA(q) يتحقق :

$$\psi(B) = \theta(B)$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad \text{حيث}$$

وبالتالي باستخدام (٥, ١٧) يكون طيف القوة للعملية MA(q)

$$P(f) = 2\sigma_e^2 \left(1 - \theta_1 e^{-i2\pi f} - \theta_2 e^{-i4\pi f} - \dots - \theta_q e^{-i2\pi q f} \right) \times \left(1 - \theta_1 e^{-i2\pi f} - \theta_2 e^{-i4\pi f} - \dots - \theta_q e^{-i2\pi q f} \right)$$

$$0 \leq f \leq 0.5 \dots (٥, ٢٧)$$

مثال (٥, ٣)

لعملية المتوسط المتحرك ذات الرتبة ١ :

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad |\theta_1| < 1$$

نجد من (٥, ٢٥) عند $q = 1$ أن التباين :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= (\theta_0 + \theta_1^2) \sigma_e^2 \\ &= (1 + \theta_1^2) \sigma_e^2 \end{aligned}$$

بما أن $\theta_0 = 1$.

كذلك من (٥, ٢٤) عند $q = 1$ دالة التباين الذاتي :

$$\gamma_k = \begin{cases} -\theta_1 \sigma_e^2 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

ودالة الارتباط الذاتي (بالقسمة على التباين) :

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

من (٥, ٢٧) نجد عند $q = 1$ أن طيف القوة للعملية $\text{MA}(1)$:

$$\begin{aligned} P(f) &= 2\sigma_e^2 (1 - \theta_1 e^{-i2\pi f}) (1 - \theta_1 e^{i2\pi f}) \\ &= 2\sigma_e^2 (1 + \theta_1^2 - \theta_1 (e^{-i2\pi f} + e^{i2\pi f})) \\ &= 2\sigma_e^2 (1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \cos 2\pi f) \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال (٥, ٤) : للعملية ذات الرتبة ٢ :

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

حيث :

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

يمكن بطريقة مشابهة لتلك التي اتبعت في مثال (٣, ٥) إثبات أن

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_e^2$$

وأن دالة الارتباط الذاتي :

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k=1 \\ \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k=2 \\ 0 & k>2 \end{cases}$$

أيضاً فإن طيف القوة للعملية $MA(2)$:

$$P(f) = 2\sigma_e^2(1-\theta_1e^{-i2\pi f} - 1-\theta_2e^{-i4\pi f})(1-\theta_1e^{i2\pi f} - 1-\theta_2e^{i4\pi f})$$

حيث $0 \leq f \leq 0.5$.

٧, ٥ عملية الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك المختلطة

The Autoregressive -Moving Average Process

ليس هناك ما يمنع من أن تكون العملية التصادفية التي نتجت عنها السلسلة الزمنية هي خليط من عملية انحدار ذاتي وعملية متوسط متحرك. لهذا ولإيجاد نموذج يستوعب العمليتين نلجأ لنموذج انحدار ذاتي ومتوسط متحرك مختلط والذي يشار إليه اختصاراً بـ **ARMA** حيث استخدم في الرمز الحرفين الأولين لكل كلمة من الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك بالانجليزية. فإذا كانت عملية الانحدار الذاتي برتبة p وعملية المتوسط المتحرك برتبة q فإن النموذج يأخذ الشكل :

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

أو بالشكل الأكثر استخداماً :

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) e_t$$

واختصاراً

$$\phi(B) \tilde{Y}_t = \theta(B) e_t \quad \dots (٥, ٢٨)$$

يرمز لعملية ARMA التي بها عملية الانحدار الذاتي ذات رتبة p وعملية المتوسط المتحرك ذات رتبة q بـ $ARMA(p, q)$. العمليات $AR(p)$ و $MA(q)$ كما نري هي الحالات الخاصة $ARMA(p, 0)$ و $ARMA(0, q)$ من هذه العملية.

وبما أن الجزء الخاص بعملية الانحدار الذاتي في (٨, ٢٨) له نفس كثيرة الحدود المميزة أي $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$ فإن شرط الاستقرار للعملية $ARMA(p, q)$ يتحقق فقط إذا كانت جذور كثيرة الحدود المميزة هي z_j حيث $j = 1, \dots, p$ من واحد. فإذا كانت جذور كثيرة الحدود المميزة هي z_j حيث $|z_j| > 1$ لكل j . ونذكر هنا أن مسألة الاستقرار في هذه العملية تحددها فقط عملية الانحدار الذاتي لأن عملية المتوسط المتحرك دائماً مستقرة. بالنسبة للأخيرة أي عملية المتوسط المتحرك يتحقق شرط قابلية العكس فقط اذا كانت جميع جذور معادلة كثيرة الحدود المميزة في

$$1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \dots - \theta_q z^q = 0$$

أكبر عددياً من ١.

وبينما رأينا أن الـ PACF في العملية $AR(p)$ لها قطع عند $k = p$ و الـ ACF في العملية $MA(q)$ لها قطع عند $k = q$ فإن أيّاً من الـ PACF و الـ ACF في العملية $ARMA(p, q)$ ليس له خاصية القطع مما يعقد التعرف علي نموذج $ARMA$.

١, ٧, ٥ التباين الذاتي ، الارتباط الذاتي ، التباين والطيف للعملية المختلطة :

إذا وضعنا العملية المختلطة (٥, ٢٨) بالشكل البديل

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

ثم ضربنا الطرفين في $(Y_{t-k} - \mu)$ وأخذنا التوقع نحصل علي

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{ye}(k) \\ &\quad - \theta_1 \gamma_{ye}(k-1) - \dots - \theta_q \gamma_{ye}(k-q) \end{aligned} \quad \dots (5.29)$$

حيث $\gamma_{ye}(k)$ دالة التغاير المقطعي **Cross-Covariance Function** بين y و e ويعرف معامل التغاير المقطعي عند k :

$$\begin{aligned} \gamma_{yr}(k) &= E((Y_{t-k} - \mu)e_t) - E(Y_{t-k} - \mu)E(e_t) \\ &= E[(Y_{t-k} - \mu)e_t] \quad \dots (5, 30) \end{aligned}$$

بما أن $E(e_t) = 0$.

ولكن Y_{t-k} تعتمد علي الهزات (أي الـ e 's) حتي الزمن $t - k$ وبالتالي أحدث e فيها هي e_{t-k} . وبما أن الـ e 's مستقلة فإن توقع $E(e_j e_{j'}) = 0$ متى ما كانت $j \neq j'$. وبما أنه لأي k بحيث $k \geq q + 1$ يكون المقدار داخل الأقواس في التغايرات المقطعية في (5, 29) مساوياً أو أكبر من واحد ، وبالتالي المقدار المطروح من t (أي k) في Y_{t-k} سيكون مساوياً أو أكبر من واحد ، وبما أن ذلك يعني أن المؤشر في e_t سيختلف عن أكبر مؤشر لـ e في Y_{t-k} فإن جميع التغايرات المقطعية في (5, 29) ستكون أصفاراً ما دامت $k \geq q + 1$. لهذا نستطيع أن نكتب :

$$k \geq q + 1 \quad \dots (5, 31)$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

وايضاً

$$k \geq q + 1 \quad \dots (5, 32)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

أي أن كل من دالة التغير الذاتي ودالة الارتباط الذاتي تحقق معادلة فروق من الرتبة

$k - p$. إذا وضعنا $k = 0$ في (٥, ٢٩) نحصل على التباين :

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_e^2 - \theta_1 \gamma_{ye}(-1) - \dots - \theta_q \gamma_{ye}(-q)$$

من ناحية أخرى فان طيف القوة للعملية $\text{ARMA}(p, q)$:

$$p(f) = \frac{2\sigma_e^2 \theta(e^{-i2\pi f}) \theta(e^{i2\pi f})}{\phi(e^{-i2\pi f}) \phi(e^{i2\pi f})} \quad \dots (٥, ٣٣)$$

حيث رتبة كثيرة الحدود في $\theta(\cdot)$ و $\phi(\cdot)$ و p و q بالترتيب .

مثال (٥, ٥)

في عملية $\text{ARMA}(1, 1)$ وهى أهم عملية مختلطة أى :

$$(1 - \phi_1 B) \tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B) e_t \quad \dots (٥, ٣٤)$$

شرط الاستقرار هو $-1 < \phi_1 < 1$ و شرط قابلية العكس $-1 < \theta_1 < 1$.

إذا وضعنا في (٥, ٢٩) $k = 0$ ، $p = q = 1$ نحصل على

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_e^2 - \theta_1 \gamma_{ye}(-1) \quad \dots (٥, ٣٥)$$

وإذا عوضنا $k = 1$ ، $p = q = 1$:

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_e^2$$

أيضا

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad \geq 2$$

أى أن دالة التغير الذاتي تحقق مجموعة من معادلات الفروق.

إذا ضربنا (٥, ٣٤) في e_{t-1} وأخذنا التوقع

$$E(\tilde{Y}_t e_{t-1}) - \phi_1 E(\tilde{Y}_{t-1} e_{t-1}) = E(e_t e_{t-1}) - \theta_1 E(e_{t-1}^2)$$

أو

$$\gamma_{ye}(-1) - \phi_1 \sigma_e^2 = 0 - \theta_1 \sigma_e^2$$

أى

$$\gamma_{ye}(-1) = (\phi_1 - \theta_1) \sigma_e^2$$

وبتعويض هذه النتيجة في (٥, ٣٥) نحصل على

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_e^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma_e^2$$

وبحل هذه المعادلة آنياً مع

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_e^2$$

نجد

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\theta_1\phi_1) \sigma_e^2}{1 - \phi_1^2}$$

و

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1) \sigma_e^2}{1 - \phi_1^2}$$

أيضاً

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad k \geq 2$$

لتكتمل بذلك دالة التغيرات الذاتي. وبقسمة كل تغير على التباين γ_0 نحصل

على الارتباط الذاتي بالإبطاءات المختلفة. مثلاً:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

وهكذا. كذلك يمكن إيجاد طيف العينة لهذه العملية بالتعريف المناسب

لـ $\theta(B)$ و $\phi(B)$ في (٥, ٣٣).

الباب السادس

منهجية بوكس - جنكينز

The Box- Jenkins Methodology

٦, ١ مقدمة

في الباب الخامس تناولنا نماذج السلاسل الزمنية المستقرة . وفي هذا الباب نعمم النقاش ليشمل النماذج غير المستقرة. في كتابهما الرائد (بوكس - جنكينز ١٩٧٦) استخدم بوكس وجنكينز منهجية للتنبؤ تحتوي النماذج المستقرة والنماذج غير المستقرة. وتقوم المنهجية على بناء نموذج للسلسلة الزمنية يتم الوصول إليه من خلال المرور بثلاثة مراحل وهى تحديد نوعية النموذج ، تقدير معالم النموذج الذي تم تحديده وإجراء اختبار تشخيصي للنموذج للتأكد من تمثيله للسلسلة .

٦, ٢ أسرة نماذج أريما Family of ARIMA models

في الباب الخامس تعرفنا على العملية المختلطة أريما $ARMA(q,p)$ والتي هي في الواقع أسرة من النماذج يتحدد أفرادها بتحديد قيم p و q . وناقشنا الحالات التي تكون فيها مستقرة كما تمت دراسة خصائصها عندما تكون مستقرة. لكن هناك سلاسل زمنية كثيرة لا يتحقق فيها شرط الاستقرار. ويمكن من خلال أخذ فرق برتبة مناسبة تحويلها لمستقرة. فإذا كانت لدينا عملية مختلطة $ARMA(q,p)$ غير مستقرة لكن يمكن تحويلها لمستقرة بأخذ d فرق ، فيما أن الجمع هو العملية العكسية للطرح (أخذ فرق) فيمكن أن نقول أن العملية المختلطة (غير المستقرة) يمكن الحصول عليها بجمع (أو تكامل) العملية المختلطة (المستقرة) d مرة . لهذا أطلق بوكس وجنكينز على العملية المختلطة غير المستقرة عملية المتوسط المتحرك والانحدار الذاتي التكاملية (التجميعية) $autoregressive integrated moving average$ ورمزا لها اختصاراً بأريما $ARIMA$. وإذا كانت رتبة عملية

المتوسط المتحرك والانحدار الذاتي q و p بالترتيب ونحتاج لـ d فرق للاستقرار نكتب
 أريما بالشكل $ARIMA(p, d, q)$.

وبدلالة مشغل الإزاحة للخلف :

$$\phi(B)\nabla^d Y_t = \theta(B)e_t \quad \dots (٦, ١)$$

$$\nabla = 1 - B \quad \text{حيث}$$

وواضح أن هذه الأسرة تشمل جميع النماذج التي تم تناولها بالباب الخامس إضافة
 لنظائرها غير المستقرة. مثلاً العملية $AR(p)$ المستقرة هي العملية
 $ARIMA(p, ٠, ٠)$.

وتقول لنا (٦, ١) أن العملية التي ولدت السلسلة هي خليط من عملية انحدار
 ذاتي برتبة p و متوسط متحرك برتبة q وأنها تحتاج منا لأخذ d فرق لتصبح مستقرة.

٦, ٣ مرحلة تحديد نوعية النموذج Identification

في هذه المرحلة يتم اختيار نموذج أو مجموعة من النماذج المرشحة لاختيار
 نموذج من بينها بحيث يكون النموذج قليل المعالم parsimonious بقدر الإمكان.
 ويكون النموذج قد تحدد إذا تحددت قيم p, q و d في $ARIMA(p, d, q)$.

ومن أهم الأدوات التي تستخدم في التعرف على النموذج دوال الارتباط
 الذاتي والذاتي الجزئي والطيف. ويساعد برنامج المحاكاة $ARIMA$ - الذي يقوم
 بتوليد سلسلة أريما بأي قيم مرغوبة للمعالم p, q و d وإبراز دوال الارتباط الذاتي
 والذاتي الجزئي والطيف بيانياً - في توجيه البحث عن النموذج المطلوب . إذ بمقارنة
 سلوك هذه الدوال في السلسلة الزمنية بالسلوك في السلاسل المولدة (والمعروف قيم
 p, q و d فيها) يمكن أحياناً تحديد أي النماذج أقرب لتمثيل السلسلة. كذلك فإن
 بعض الخصائص النظرية للعمليات والتي تعرضنا لها في الباب الخامس يمكن أن
 تساعدنا في تحديد النموذج الذي يتوافق مع السلسلة الزمنية المعنية.

١, ٣, ٦ تحديد رتبة الفرق d

إذا كانت السلسلة عشوائية أي $(٠, ٠, ٠)$ ARIMA فهي مستقرة. وفي هذه الحالة فإن كل معاملات الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي يتوقع أن تكون أصفاً أو قريبة من الصفر. لهذا يمكن من رسم دالة الارتباط الذاتي معرفة ما إذا كانت السلسلة مستقرة. ذلك أنه إذا كانت السلسلة الزمنية مستقرة فإن معاملات الارتباط الذاتي تهبط للصفر بعد إبطاء ٢ أو ٣ على الأكثر بينما للسلسلة غير المستقرة تكون معاملات الارتباط الذاتي مختلفة معنوياً عن الصفر لعدة إبطاءات وقد يكون هناك اتجاه عاملاً للارتباط الذاتي.

لهذا لتحديد قيمة d نقوم بأخذ الفرق ذو الرتبة ١, ٢, ... (عدد قليل من الفروق الأولى) وفي كل مرة نرسم دالة الارتباط الذاتي. ثم نقرر أن السلسلة أصبحت مستقرة (وبالتالي تتحدد قيمة d) بمجرد أن يبدأ الارتباط الذاتي الهبوط نحو الصفر بسرعة. عادة قيمة d تكون أحد الأرقام ٠, ١, ٢. ويكفي تقدير الارتباطات الذاتية حتى إبطاء ٢٠.

٢, ٣, ٦ تحديد رتبة الانحدار الذاتي p والمتوسط المتحرك q

بالاستعانة ببرنامج المحاكاة ARIMA وبعض الملاحظات النظرية في الباب الخامس يمكننا بصفة عامة تحديد قيمة p و q لعمليات الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك والعمليّة المختلطة بفحص رسم مقدرات دوال الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي واتخاذ القرار في ضوء القواعد الآتية :

(i) إذا كانت دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية (بعد إجراء d فرق عليها) تتناقص أسياً بينما دالة الارتباط الذاتي الجزئي تهبط للصفر بعد إبطاء p نقرر أن العمليّة $ARIMA(p, d, ٠)$.

(ii) إذا كانت دالة الارتباط الذاتي (بعد إجراء d فرق) تهبط للصفر بعد إبطاء q ودالة الارتباط الذاتي الجزئي تتناقص أسياً نقرر أن العمليّة $ARIMA(٠, d, q)$.

(iii) إذا كان كل من دالة الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي بعد اخذ الفرق المناسب تتناقص بالتدريج فهذا مؤشر على عملية مختلطة. وقد أشار بوكس وجنكينز (١٩٧٦) إلى أنه إذا كانت دالة الارتباط الذاتي تظهر تناقصاً أسياً أو موجات جيب متضائلة **damped sine waves** (في شكل إرتفاع وإنخفاض) بعد أول $q - p$ إبطاء ودالة الارتباط الذاتي الجزئي تظهر هذا النمط بعد أول $q - p$ إبطاء فإن العملية تحوى عملية الانحدار ذاتي برتبة p وعملية متوسط متحرك برتبة q ، أى $ARIMA(p,d,q)$ حيث d الفرق المأخوذ. لكن في حالة العملية المختلطة ينبغي أن نلاحظ أن الصورة عادة لا تكون واضحة وقد نضطر لتجربة عدة قيم لـ p و q .
وبما أن الحالات $p = 1, p = 2, q = 1, q = 2$ هى الأهم في الواقع فسنناول خصائصها بشيء من التفصيل والسلوك المشار اليه أدناه مفترض حدوثه بعد أخذ d فرق على السلسلة.

عملية الانحدار الذاتي $ARIMA(١,d,٠)$

- (١) دالة الارتباط الذاتي تتناقص أسياً.
- (٢) معامل الارتباط الذاتي الجزئي بإبطاء ١ هو فقط الذي يختلف معنوياً عن الصفر.
- (٣) رسم الطيف تغطي عليه الموجات ذات التكرار المنخفض.
- القيم المسموح بها لـ ϕ_1 تحقق $-1 < \phi_1 < 1$
- عملية المتوسط المتحرك $ARIMA(٠,d,١)$

- (١) معامل الارتباط الذاتي برتبة ١ هو فقط الذي يختلف معنوياً عن الصفر.
- (٢) دالة الارتباط الذاتي تتناقص أسياً.
- (٣) رسم الطيف يظهر سيطرة الموجات ذات التكرارات العالية لـ ϕ_1 موجبة وسيطرة الموجات ذات التكرار المنخفضة لـ ϕ_1 سالبة .
- القيم المسموح بها لـ θ_1 $-1 < \theta_1 < 1$

عملية الانحدار الذاتي $ARIMA(٢,d,٠)$

- (١) دالة الارتباط الذاتي تظهر خليطاً من التناقص الأسى وموجات الجيب المتضائلة.

(٢) فقط معاملات الارتباط الجزئي بإبطاء ١ و ٢ تختلف معنوياً عن الصفر.

(٣) رسم الطيف يظهر سيطرة لموجات ليست هي بذات تكرارات كبيرة أو صغيرة.

القيم المسموح بها للمعاملات : $-1 < \phi_2 < 1$

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

عملية المتوسط المتحرك $ARIMA(٠,d,٢)$

(١) فقط معاملات الارتباط الذاتي ذات الإبطاء ١ و ٢ تختلف معنوياً عن الصفر. (٢)

دالة الارتباط الذاتي الجزئي تظهر خليطاً من الانخفاض الأسى وموجات الجيب المتضائلة.

(٣) رسم الطيف يظهر سيطرة للموجات ذات التكرارات العالية.

قيم المعاملات المسموح بها : $-1 < \theta_2 < 1$

$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

العملية المختلطة $ARIMA(١,d,١)$

(١) دالة الارتباط الذاتي تتناقص أسياً بعد الإبطاء الأول.

(٢) دالة الارتباط الذاتي الجزئي تتناقص أسياً بعد الإبطاء الأول.

(٣) رسم الطيف يظهر سيطرة للموجات ذات التكرارات المنخفضة.

قيم المعاملات المسموح بها $-1 < \phi_1 < +1$ ، $-1 < \theta_1 < +1$.

في معظم الحالات لا يكون واضحاً القيم التي يتعين إعطاؤها ل p و q في نموذج لتمثيل السلسلة الزمنية. أي لا يتسنى لنا الاستفادة من القواعد المذكورة أعلاه. في مثل هذه الحالات نقوم بتجربة قيم مختلفة لها ونختار النموذج الذي يعطى أفضل نتيجة (أي أقل خطأ) عند استخدامه للتنبؤ بقيم السلسلة (المعروفة)، وذلك وفق معيار معين عادة متوسط مربعات الخطأ MSE أو معامل التحديد R^2 .

الإصدارات الأخيرة من SPSS (مثلاً ١٧) تعطي خيار النمذج الخبير Expert Modeler الذي يقوم بهذه العملية ويختار أفضل القيم لـ p و q (وأيضاً d) نيابة عنا.

٤, ٦ تقدير المعالم Estimation of parameters

بعد تحديد نموذج (أو مجموعة نماذج مبدئية)، وبافتراض صحته (صحتها) تكون الخطوة أو المرحلة التالية هي تقدير المعالم $\theta_1, \theta_2, \dots$ و $\phi_1, \phi_2, \dots$ في النموذج أو النماذج المختارة. هناك أسلوبان لذلك :

(i) محاولة مجموعات مختلفة من قيم المعالم بالنموذج واختيار المجموعة التي تعطي أقل متوسط مربعات خطأ. هذا الأسلوب يسمى المحاولة والخطأ trial & error .
(ii) إختيار تقديرات مبدئية للمعالم ثم إستخدامها في طريقة تكرارية مثل خوارزمية ماركواردت Marquardt algorithm (وهي طريقة للتقدير في النماذج غير الخطية مطورة من طريقة نيوتن - قاوس للمعادلات غير الخطية). للحصول على تقديرات محسنة. في حالة التوزيع الطبيعي يمكن إثبات أن هذه المقدرات هي مقدرات الإمكان الأكبر. وفيما يلي توضيح لكيفية إيجاد مقدرات مبدئية.

١, ٤, ٦ التقدير المبدئي للمعالم في عملية الانحدار الذاتي

يمكن إيجاد تقديرات مبدئية لمعاملات الانحدار الذاتي باستخدام معادلات يول - ووكر (١١, ٥)، التي تربط بين معاملات الانحدار الذاتي ومعاملات الارتباط الذاتي وذلك بتعويض تقديرات الارتباط الذاتي r_k في معادلات يول - ووكر ومن ثم حلها للحصول على مقدرات لل ϕ_k .

مثال (١, ٦)

في العملية $ARIMA(1,d,0)$ بوضع $k=1$ في (١٠, ٥) نحصل على المعادلة الوحيدة

$$p_1 = \phi_1$$

وبتعويض r_1 المحسوبة من العينة بدلاً عن ρ_1 يكون التقدير المبدئي ل ϕ_1 :

$$\hat{\phi}_1 = r_1$$

مثال (٢، ٦)

في العملية $ARIMA(2, d, 0)$ نعوض $k = 2$ في (١٠، ٥). يمدنا ذلك بالمعادلتين:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

وبوضع r_1 و r_2 بدلاً عن ρ_1 و ρ_2 بالترتيب وحل المعادلتين نحصل على :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1-r_1^2}$$

٢، ٤، ٦ التقدير المبدئي للمعالم في عملية المتوسط المتحرك

لإيجاد تقديرات مبدئية ل $\theta_1, \theta_2, \dots$ في عملية المتوسط المتحرك تستخدم

(٢٦، ٥) أي

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

حيث نستبدل ال ρ_k ب ال r_k .

مثال (٣، ٦)

للعلمية $ARIMA(0, d, 1)$ نعوض $k = 1$ و $q = 1$. هذا يعطي :

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

وباستبدال ρ_1 بـ r_1 والحل نصل للمعادلة

$$\theta_1^2 r_1 + \theta_1 + r_1 = 0$$

ونختار بين جذري المعادلة الجذر الذي يقع داخل النطاق المسموح به ± 1 .

مثال (٤, ٦)

للعلمية $ARIMA(0, d, 2)$ بوضع $q = 2$ و k مساوية لـ ١ ولـ ٢ نحصل بالترتيب على

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \text{ و}$$

وبتعويض التقديرات r_1 و r_2 بدلاً عن ρ_1 و ρ_2 نحصل على معادلتين

يمكن حلها بالاستعانة بجداول وخرائط قدمها بوكس وجنكينز (١٩٧٦).

للعلمية المختلطة $ARIMA(1, d, 1)$ يمكن الحصول على تقدير مبدئي لـ θ_1 و ϕ_1 باستخدام العلاقات :

$$\rho_1 = \frac{(1 - \theta_1 \phi_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}$$

$$\rho_2 = \rho_1 \phi_1$$

وفي كل الأحوال ، في حالة بروز مشكلة في إيجاد مقدرات مبدئية بهذه الطرق

يمكن اختيار أى تقدير بالتخمين المجرد ونترك لخوارزمية ماركواردت إكمال المهمة .

٥, ٦ الاختبار التشخيصي **Diagnostic checking**

المرحلة الأخيرة بعد التعرف على النموذج وتقدير معالنه هو اختبارها للتأكد من

توافقه مع البيانات ومن أنه لا يحوى معالم لا داعي لها.

أولاً يوفق النموذج على بيانات السلسلة. أى يستخدم للتنبؤ بقيم السلسلة وكأنها غير معروفة. ثانياً تحسب البواقي حيث الباقي في الزمن t ، مثلاً هو الفرق بين القيمة الفعلية Y_t والتنبؤ $\hat{Y}_t$ من النموذج.

إذا كان النموذج ناجحاً فإن البواقي لن يتبقي فيها نمط منتظم وستكون أصفاراً أو قريبة من الصفر. وكذلك معاملات الارتباط الذاتي في المجتمع ستكون كلها غير معنوية ويمكن التحقق من عشوائية سلسلة البواقي وبالتالي صحة النموذج بعده طرق منها :

(١) الاستفادة من النتيجة التي تقول أنه إذا كانت السلسلة الزمنية عشوائية فإن

r_k ستبتع تقريباً التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين $\frac{1}{n}$. وعليه إذا كنا نشك في أن الارتباط الذاتي بإبطاء معين k يختلف عن الصفر فيمكن اختبار معنويته وإتخاذ القرار بأنه غير معنوي إذا كانت r_k تقع في الحدود $\pm 1.96 \frac{1}{\sqrt{n}}$ (باستخدام مستوي معنوية ٥٪).

وإذا كانت r_k تقع داخل الحدود لكل k نقرر أن السلسلة عشوائية والنموذج يمثل السلسلة بشكل مقبول.

(٢) اختبار أن مجموعة من معاملات الارتباط الذاتي $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ أصفاراً باستخدام إحصائية بوكس - بيرس : **Box-Pierce**

$$Q = n' \sum_{k=1}^m r_k^2$$

والتي في حالة النموذج جيد والبواقي عشوائية وصغيرة تتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $m - S$ حيث m عدد معاملات الارتباط الذاتي و S عدد المعالم التي تم تقديرها في النموذج. وكذلك n' عدد المشاهدات في السلسلة مطروحاً منه رتبة الفرق d (إن أخذ الفرق).

فنتقارن قيمتها المشاهدة بالقيمة الحرجة بالطرف الأيمن من توزيع χ^2 بدرجات الحرية المذكورة. فإذا كانت القيمة الحرجة أكبر من قيمة Q المحسوبة نستنتج أن السلسلة الزمنية للبواقي عشوائية والنموذج يتوافق مع البيانات بشكل جيد. نصل لنفس الاستنتاج إذا كانت قيمة P أكبر من مستوي المعنوية. لاحظ أن قيمة Q تكبر مع كبر معاملات الارتباط الذاتي.

كذلك يمكن لنفس الهدف استخدام إحصائية بوكس - لجنك Box-Ljung :

$$L = n'(n' + 2) \sum_{k=1}^m \frac{r_k^2}{n - k}$$

والتي - في حالة صحة عشوائية سلسلة البواقي - تتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $m - S$. نقرر العشوائية وبالتالي صحة النموذج إذا كانت القيمة المشاهدة أقل من الحرجة.

(٣) من مؤشرات العشوائية وصحة النموذج أيضاً أن رسم الطيف يظهر كل الموجات بارتفاع متساوٍ .

من ناحية أخرى يساعد فحص الأخطاء المعيارية للمعاملات المختلفة واختبار معنويتها في معرفة المعالم التي تستحق أن تبقى في النموذج. فالمعلم غير المعنوي أو الذي له خطأ معياري كبير يمكن حذفه من النموذج.

أيضاً عند مقارنة نموذجين لتحديد أيهما أفضل تمثيلاً للبيانات نلاحظ أولاً أنه إذا تساوى نموذجان من حيث تمثيل البيانات فإن الذي يحوى إبطاءات وبالتالي معالم أقل يكون الأفضل. ذلك أن زيادة عدد المعالم يعني نقص درجات الحرية . لذلك فإن أى معيار يستخدم في المفاضلة بين النماذج ينبغي أن يأخذ هذه الحقيقة في الاعتبار. ورغم توفر عدة معايير لدى تمثيل النموذج للبيانات وللمقارنة النماذج إلا أن المعيارين الأكثر استخداماً وشهرة هما معيار أكايكى للمعلومات **Information Akaike Criterion (AIC)** ومعيار شوارتز البيزي **Schwartz Bayesian Criterion (SBC)** .

ويعرف معيار أكايكي للمعلومات :

$$AIC = T \ln(SSR) + 2n^{\bullet}$$

حيث :

T: عدد المشاهدات المتاح للاستخدام.

$n^{\bullet}$: عدد المعالم التي تم تقديرها (عادة $q + p$ مع إضافة ثابت أحياناً)
(SSR) : مجموع مربعات البواقي.

كذلك يعرف معيار شوارتز البيزي :

$$SBC = T \ln(SSR) + n^{\bullet} \ln T$$

وواضح أنه كلما كانت قيمة المعيار (AIC أو SBC) صغيرة كلما كان هذا مؤشراً لنموذج أفضل. ومع تحسن توفيق النموذج تتجه قيم كل من المعيارين ل $-\infty$.
وعند مقارنة نموذجين A و B لمعرفة أيهما أفضل تمثيلاً للبيانات نقرر أن A أفضل من B إذا كانت قيمة AIC أو SBC له أقل من تلك التي ل B .

ومن المهم أن نلاحظ أن قيمة T يجب أن تكون متساوية في كلا النموذجين عند مقارنتهما باستخدام AIC أو SBC لأنها تؤثر في قيمتهما فمثلاً إذا كانت T في النموذج A أصغر منها في B فإن قيمة ل AIC أو SBC أصغر للنموذج A لا تعني أن A أفضل من B لأنها قد تكون ناتجة عن الفرق في قيمة T.

٦, ٦ نماذج أريما الموسمية Seasonal ARIMA models

قد تظهر السلسلة الزمنية تأثيراً موسمياً يتكرر بطول فترة تكرار L مثلاً. فإذا نظرنا للقيم التي تبعد عن بعض L فترة زمنية كسلسلة زمنية ، فيمكن أن نتصور أن هذه السلسلة يمكن أيضاً أن تتأثر بعملية النحدار ذاتي أو عملية متوسط متحرك أو الاثنين معاً. ويمكن تضمين كل ذلك في نموذج أريما مطور يستوعب الجانب الموسمي في السلسلة الزمنية. ويسمى بالتالي نموذج أريما الموسمي.

يأخذ النموذج الذي تضاف إليه الموسمية الشكل :

$$ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)^L$$

وتمثل p ، q و d رتب عملية الانحدار الذاتي ، المتوسط المتحرك والفرق في الجزء غير الموسمي من النموذج وهي التي مرت علينا سابقاً. كما تمثل D, P و Q نظريات هذه الرتب في الجانب الموسمي. أما L فهي طول فترة التكرار الموسمي.

مثلاً إذا كانت البيانات شهرية قد تكون $L = 12$. وتوضح هذه الصيغة أن أى مكوّن في الجزء غير الموسمي من النموذج له نظير في الجزء الموسمي. ولتوضيح كيفية كتابة نموذج أربما الموسمي بدلالة مشغل الإزاحة للخلف نأخذ كمثال النموذج:

$$ARIMA(1,1,1)(1,1,1)^4$$

هذا النموذج يمكن كتابته بالشكل :

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B)(1 - B^4)Y_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4)e_t$$

حيث :

$1 - \phi_1 B$: مشغل عملية $AR(1)$ غير الموسمية.

$1 - \Phi_1 B^4$: مشغل عملية $AR(1)$ الموسمية.

$1 - B$: مشغل الفرق غير الموسمي.

$1 - B^4$: مشغل الفرق الموسمي.

$1 - \theta_1 B$: مشغل عملية $MA(1)$ غير الموسمية.

$1 - \Theta_1 B^4$: مشغل عملية $MA(1)$ الموسمية.

وإذا أردنا فك الأقواس نبدأ في كل طرف من أقصى اليمين ونضرب ونحن

نتجه لليسار كما سنري بعد قليل.

١, ٦, ٦, ٦ التأكيد من وجود الموسمية

إذا كانت السلسلة الزمنية غير مستقرة فيجب أولاً إزالة عدم الاستقرار بأخذ فرق مناسب قبل محاولة فحص السلسلة للموسمية لأن وجود عدم الاستقرار يعقد عملية اكتشاف الموسمية.

وبعد أن تصبح السلسلة مستقرة ننظر في دالة الارتباط الذاتي ، وخاصة عند معاملات الارتباط الذاتي ذات الإبطاء الكبير (أكثر من ٢). فإذا كانت هناك

معاملات ارتباط معنوية يكون هذا مؤشراً بوجود الموسمية مثلاً إذا كانت البيانات ربع سنوية فتتوقع وجود معاملات ارتباط ذاتي معنوية عند الإبطاء ٤ ومضاعفاته كذلك فإن رسم السلسلة سيظهر موجات تتكرر بطول فترة تكرار ٤. كذلك فإن طيف القوة أو البيريودغرام يظهران قوة موجبة كبيرة للموجات ذات الطول ٤ أو مضاعفاته. يوضح الشكل (٦, ١) سلسلة بها تأثير موسمي. ويتم تحديد معالم النموذج الموسمي وتقدير معالمه واختباره كما في حالة غير الموسمي.



الشكل (٦, ١) سلسلة بها تأثير موسمي

٦, ٧ التنبؤ باستخدام نموذج أريما

بعد التوصل لنموذج أريما يناسب السلسلة الزمنية محل الدراسة وتقدير جميع معالمه والتأكد من صحته ، يمكن بعد ذلك استخدامه للتنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة. ويتطلب ذلك أولاً وضع النموذج في شكل نموذج انحدار بحيث يكون المتغير التابع Y_t فقط بالطرف الأيسر من المعادلة.

فمثلاً لاستخدام النموذج أريما $ARIMA(1,1,1)(1,1,1)^4$ للتنبؤ نبدأ بفك الأقواس في :

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B)(1 - B^4)Y_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4)e_t$$

ببدء الضرب من اليمين في كل طرف :

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B)(Y_t - Y_{t-4}) = (1 - \theta_1 B)(e_t - \Theta_1 e_{t-4})$$

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \Phi_1 B^4)(Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-4} + Y_{t-5}) = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \Theta_1 Y_{t-4} + \theta_1 \Theta_1 e_{t-5}$$

وبالاستمرار على هذا المنوال ونقل جميع الحدود للطرف الأيمن عدا Y_t نجد:

$$Y_t = (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + (1 + \Phi_1)Y_{t-4} - (1 + \Phi_1 + \phi_1 + \phi_1 \Phi_1)Y_{t-5} \\ + (\phi_1 + \phi_1 \Phi_1)Y_{t-6} - \Phi_1 Y_{t-8} + (\Phi_1 + \phi_1 \Phi_1)Y_{t-9} - \phi_1 \Phi_1 Y_{t-10} \\ + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \Theta e_{t-4} + \theta_1 \Theta_1 e_{t-5}$$

وللتنبؤ m فترة للإمام نضيف (بعد استبدال جميع العالم بمقدراتها) m لجميع المؤشرات. مثلاً للتنبؤ فترة واحدة $m = 1$ للإمام نضيف ١ لكل المؤشرات فتصبح المعادلة :

$$Y_{t+1} = (1 - \hat{\phi}_1)Y_t + \hat{\phi}_1 Y_{t-1} + (1 + \hat{\Phi}_1)Y_{t-3} + \dots \\ + e_{t+1} - \hat{\theta}_1 e_t - \hat{\Theta}_1 e_{t-3} + \hat{\theta}_1 \hat{\Theta}_1 e_{t-4}$$

في هذه الحالة ستكون هناك بالضرورة أخطاء لم تعرف بعد (إذا كانت Y_t هي آخر قيمة في السلسلة). مثلاً في المعادلة أعلاه إذا كانت Y_t آخر مشاهدة في السلسلة الزمنية ، فيما أن Y_{t+1} لم تشاهد بعد لا يمكن معرفه e_{t+1} . لهذا عند التنبؤ نضع جميع ال e غير المعروفة أصفاراً.

٨, ٦ استخدام الحاسب الآلي

الإصدارات ١٦ و ١٧ لحزمة SPSS تتيح خيار النمذج الخبير expert modeler كما ذكرنا. اختيار النمذج الخبير لإيجاد أفضل نموذج أريما للسلسلة الزمنية يوفر للمستخدم مهمة القيام بتجربه قيم مختلفة لرتب عمليات الانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك والفرق (الموسمية منها وغير الموسمية) إذ يقوم هو بذلك ويقدم النموذج الذي يعطي أفضل تنبؤ وفق معيار معين.

مثال (١, ٦)

لنأخذ مثال الزلاجات المائية (مثال ٨, ٢). عند استخدام خدمة النمذج الخبير فى حزمة SPSS (إصدار ١٧) نجد أن أفضل نموذج أريما لهذه السلسلة هو النموذج

$$ARIMA (0,0,0)(0,1,0)^{12} \text{ أى بصورة أخرى :}$$

$$Y_t = \mu + Y_{t-12} + e_t$$

كذلك كانت $R^2 = 0.00$ بينما متوسط مربعات الخطأ ٢٢, ٤١٣. من ناحية أخرى كانت قيمة p لاختبار Box-Ljung وقيمة p للثابت ٠, ٨٣٦ و ٠, ٧٧٣ بالترتيب.

يعنى ذلك أن الفرق الأول الموسمي لهذه السلسلة تنتج عنه سلسلة عشوائية (ضجة بيضاء) وأن صحة النموذج استناداً على اختبار Box-Ljung جيدة. مثال (٦, ٢)

لسلسلة زمنية شملت المبيعات الشهرية لألعاب الأطفال بمتجر (جدول (٦, ١)) كان النموذج الذي تم اختياره بواسطة النموذج الخبير هو $(1,0,0)(0,1,1)^{12}$ ARIMA والذي يمكن كتابته بالشكل :

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t - e_{t-12} - \Theta(e_{t-12} + e_{t-24})$$

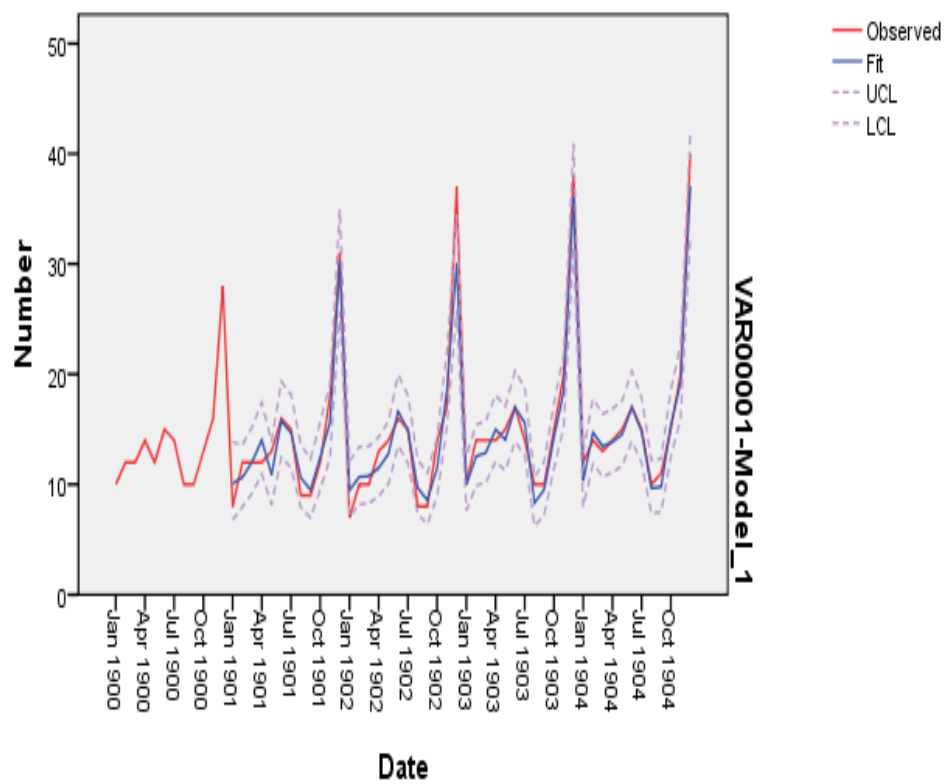
مقدرات المعالم كانت $\hat{\phi} = 0.631$ بخطأ معياري ٠, ١٢٥ وهو معنوي إذ $p = 0.000$. كذلك كانت $\hat{\Theta} = 0.507$ بخطأ معياري ٠, ١٩٦ وهو معنوي أيضاً بمستوى معنوية ٢٪ لأن $p = 0.013$.

كذلك $R^2 = 0.948$ و $RMSE = 1.673$ مما يعنى جودة توفيق النموذج. ويدعم ذلك اختبار Box-Ljung حيث كانت قيمة $p = 0.403$ وهى كبيرة. للتنبؤ إذن تستخدم المعادلة :

$$\hat{Y}_t = 0.631Y_{t-1} + e_t - e_{t-12} - 0.507(e_{t-12} - e_{t-24})$$

وفي شكل (٦, ٢) رسم للسلسلة والقيم المتنبأ بها مع فترات الثقة.

شكل (٢، ٦)



السنة	الشهر	المبيعات	السنة	الشهر	المبيعات
١٩٠٠	١	١٠	١٩٠٢	٧	١٥
	٢	١٢		٨	٨
	٣	١٢		٩	٨
	٤	١٤		١٠	١٤
	٥	١٢		١١	١٧
	٦	١٥		١٢	٣٧
	٧	١٤		١	١٠

	۸	۱۰	۱۹۰۳	۲	۱۴
	۹	۱۰		۳	۱۴
	۱۰	۱۳		۴	۱۴
	۱۱	۱۶		۵	۱۵
	۱۲	۲۸		۶	۱۷
۱۹۰۱	۱	۸	۱۹۰۴	۷	۱۴
	۲	۱۲		۸	۱۰
	۳	۱۲		۹	۱۰
	۴	۱۲		۱۰	۱۵
	۵	۱۳		۱۱	۲۰
	۶	۱۶		۱۲	۳۸
	۷	۱۵		۱	۱۲
	۸	۹		۲	۱۴
	۹	۹		۳	۱۳
	۱۰	۱۲		۴	۱۴
	۱۱	۱۸		۵	۱۵
	۱۲	۳۱		۶	۱۷
۱۹۰۲	۱	۷		۷	۱۵
	۲	۱۰		۸	۱۰
	۳	۱۰		۹	۱۱
	۴	۱۳		۱۰	۱۵
	۵	۱۴		۱۱	۲۰
	۶	۱۶		۱۲	۴۰

جدول ۱، ۶

الباب السابع

نماذج أخرى متنوعة

١, ٧ مقدمة

في هذا الباب نستعرض بإيجاز أنواع خاصة من نماذج السلاسل الزمنية ، كما نتناول أيضاً مشكلة تصميم نظم التحكم للأمام والخلف ، وهو موضوع ذو أهمية فائقة في تحليل السلاسل الزمنية. والهدف الأساسي هنا هو إعطاء مقدمة موجزة لكل هذه المواضيع ليتعرف القارئ على المفاهيم الأساسية المرتبطة بها .

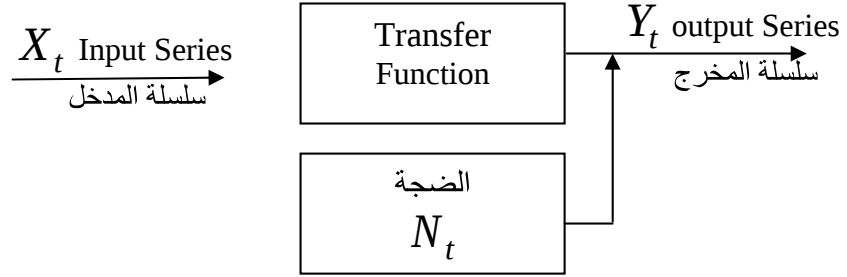
٢, ٧ نماذج الدالة التحويلية Transfer Function Models

كل النماذج التي تم تناولها حتي الآن خاصة بنمذجة سلسلة زمنية واحدة مما يعني أنها نماذج وحيدة المتغير **univariate models**. ليس هناك ما يمنع من التعميم للحالة التي يكون لدينا فيها عدة* سلاسل زمنية **multiple time series** وبما أن الحسابات والخطوات المطلوبة في تحليل هذه النماذج بالغة التعقيد فإننا سنكتفي بالحالة الثنائية التي يكون فيها سلسلتان زمنتان فقط.

١, ٢, ٧ تعريف الدالة التحويلية: في الدالة التحويلية الثنائية والتي سنشير إليها من الآن فصاعداً بالدالة التحويلية دون إضافة صفة الثنائية ، تكون لدينا سلسلتين زمنتين X_t و Y_t . السلسلة X_t تسمى سلسلة المدخل **input series** والسلسلة Y_t تمثل سلسلة المخرج **output series**. فمثلاً X_t قد تكون سلسلة زمنية تمثل الصرف على الدعاية لسلعة و Y_t السلسلة الزمنية لحجم المبيعات منها.

يفترض الآن أن X_t تؤثر على Y_t من خلال علاقة أو دالة تسمى الدالة التحويلية . وتعرض Y_t - بالإضافة لتأثير X_t - لتأثير متغيرات أخرى غير معروفة يضمن تأثيرها كلها فيما يسمى بالضجة ويرمز له ب N_t .

* بعض الكتاب يطلق على هذه النماذج النماذج متعددة المتغيرات **Multivariate Models** وعند تطبيق طرق اريما عليها بشار لها ب **MARIMA** لكن يبدو أن من الأنسب حصر هذا المصطلح لما يسمى احيانا سلسلة زمنية متجة **vector time series** (الفصل (٧.٣))



هناك صيغتان للدالة التحويلية :

الصيغة الأولى: هذه الصيغة مفيدة في توضيح فكرة الدالة التحويلية الأساسية. وتأخذ الشكل:

$$\begin{aligned}
 Y_t &= v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + \dots + v_k X_{t-k} + N_t \quad \dots (٧, ١) \\
 &= (v_0 + v_1 B + \dots + v_k B^k) X_t + N_t \\
 &= v(B) X_t + N_t
 \end{aligned}$$

حيث :

$$Y_t = \text{سلسلة المخرج (مثلاً المبيعات).}$$

$$X_t = \text{سلسلة المدخل (مثلاً الصرف على الدعاية).}$$

$$N_t = \text{الضجة.}$$

$$k = \text{رتبة الدالة التحويلية}$$

$$v_1, v_2, \dots = \text{أوزان الدالة التحويلية.}$$

الصيغة الثانية: الصيغة الثانية يفترض فيها أنه قد تم إجراء أي فروق مطلوبة وأي تحويلات مطلوبة على السلاسل X_t, Y_t, N_t لجعلها مستقرة من حيث المتوسط والتباين ، حيث يرمز للسلاسل بعد التعديل بـ X_t, Y_t, N_t بالترتيب. كذلك توضع الصيغة بحيث تتطلب عدداً أقل من المعالم خاصة عندما تكون k في (١, ٧) كبيرة. وفق هذه الصيغة تكون الدالة التحويلية :