وتبرير ذلك ، هو أنه إذا كانت طريقة التنبؤ تسير بشكل صحيح فإن عدد الأخطاء السالبة سيساوي تقريباً عدد الموجبة وستكون الأخطاء عددياً متقاربة في القيمة. في هذه الحالة يتوقع أن تكون قيمة البسط صفراً. وعليه فإن القيمة الكبيرة لـ**TS** تعني أن طريقة التنبؤ – ومن خلالها α – أدت لأخطاء تنبؤ معظمها سالب أو معظمها موجب. بمعني آخر القيم التنبؤية معظمها أكبر من القيم الفعلية أو معظمها أصغر منها. ولهذا فإن القيم الكبيرة لـ**TS** تدفعنا للشك بأن طريقة التنبؤ وبالتالي اختيار α لم تعد سليمة. ويحدد الكبر حسب حد ضبط معين **k** . وعادة تؤخذ **k** بين ٤ و٦.

مثال (٤ , ٤)

في مثال (٢ , ٤) نجد من العمود الأخير بجدول (٢ , ٤) :

$$\sum_{t=1}^{12} e_t = -1.00 + (-.98) + \ldots + 3.70 = 17.56$$

$$\frac{\sum_{t=1}^{12} |e_t|}{12} = \left[|1-1| + |-0.98| + \ldots + |3.70|\right] \;/12 = \frac{25.44}{12} = 2.12$$

وبالتالي تكون إشارة التتبع :

$$TS = \frac{17.56}{2.12} = 8.28$$

وهى كبيرة مما يعني أن طريقة التنبؤ لم تعد تعطي نتائج صحيحة بمواصلة استخدام نفس قيمة α.

يفضل كثير من العاملين في مجال التنبؤ استخدام ثابت تمهيد يتغير تلقائياً مع الزمن بهدف جعل طريقة التنبؤ أكثر تكيفاً مع التغيرات التي تطرأ على السلسلة . وهناك عده طرق لتحقيق ذلك تسمي طرق السيطرة التكيفية **adaptive control procedures**. من هذه الطرق طريقة تشاو ((١٩٦٥)**Chow**) تتطلب هذه الطريقة باختصار ما يلى : إذا كان ثابت التمهيد هو α يستحدث ثابتي تمهيد

آخرين $\alpha + \delta$ و $\alpha - \delta$ (يقترح تشاو أن تكون $\delta = 0.05$). بعد ذلك يطبق التمهيد الأسى على السلسلة الزمنية باستخدام كل من الثوابت الثلاثة على حده. وفى كل حالة يحسب المتوسط المطلق لانحرافات أخطاء التنبؤ حتى الزمن t. فإذا كان هذا المقدار أقل في الحالة α يستمر استخدامها عدا ذلك يستخدم الثابت من الاثنين الآخرين الذي يعطى أقل متوسط مطلق لانحرافات أخطاء التنبؤ.

٤ , ٥ , ٢ التمهيد الأسى المزدوج لهولت Holt's double-exponential soothing

هذه الطريقة مناسبة في الحالة التي تكون فيها السلسلة الزمنية خاضعة لاتجاه عام. ويتم التنبؤ فيها باستخدام ثابتي تمهيد α و γ لهذا تسمي أحياناً طريقة هولت ذات المعلمين **Holt's two-parameter method**.

وترتكز الطريقة على المعادلات الثلاث التالية:

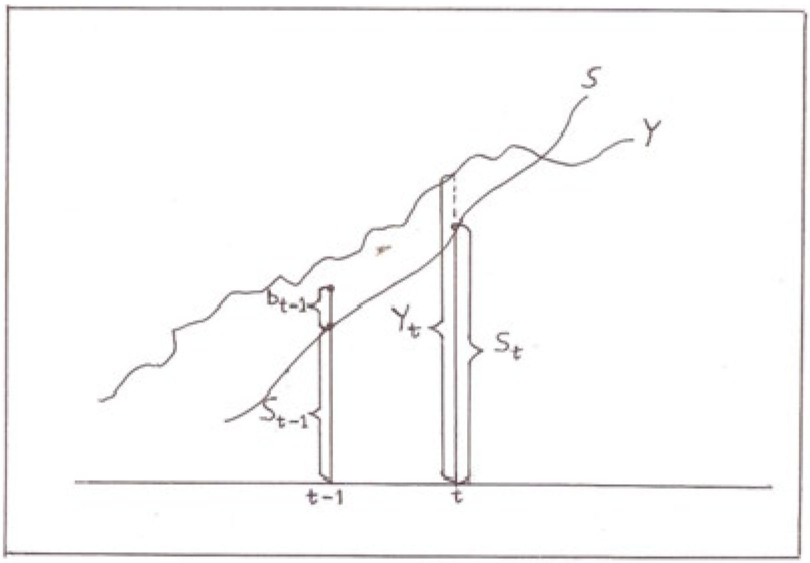
$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) \qquad \text{... (٤ , ٤)}$$

$$b_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1+\gamma) b_{t-1} \qquad \text{... (٤ , ٥)}$$

$$F_{t+m} = S_t + b_t m \qquad \text{... (٤ , ٦)}$$

حيث تمثل **S** قيمة ممهدة ، **b** اتجاه عام و **m** عدد الفترات المراد التنبؤ بها للأمام. ومن المفيد للقارئ أن يتذكر أن كلمة تمهيد تعني ببساطة عملية أخذ متوسط بشكل ما . وكل معادلات التمهيد الأسى تتضمن أخذ متوسط (مرجح) لتمهيد قيم ما.

في المعادلة (٤ , ٤) يتم تمهيد قيم السلسلة للحصول على قيم ممهدة **S** بدلاً عن القيم الأصلية Y ليمكن بعد ذلك استخدام هذه القيم (التي يتوقع أن تمثل النمط العام لسير السلسلة) في التنبؤ من خلال المعادلة (٤ , ٦). القيمة الممهدة في الزمن **t**، S_t يتم الحصول عليها بتعديل القيمة الممهدة في الزمن السابق S_{t-1} بإضافة الاتجاه العام في الزمن $t-1$ ، b_{t-1} إليها لينعكس تأثيره عليها زيادة أو نقصاناً فتقترب بذلك من القيمة الفعلية في الزمن **t** أى Y_t. القيمة الممهدة في الزمن **t** تؤخذ بعد ذلك كوسط مرجح بالأوزان α و $1-\alpha$ لـ Y_t و $S_{t-1} + b_{t-1}$. أنظر شكل (٤ , ١)



شكل (4-1)

الاتجاه العام **b** بدوره قد يتغير مع الزمن. لذلك نحتاج لأن ننظر إليـه كسلسـلة زمنيـة ونقوم بتمهيده حتى يمكن تبين نمطه العام وتقدير قيمته في كل فترة زمنية.

وإذا توفرت القيم الممهدة في الزمن **t** والزمن $t-1$ أى S_t و S_{t-1} فإن أفضل تقدير للاتجاه العام في الزمن $t-1$ يكون الفرق بينهما $S_t - S_{t-1}$ فإذا كان الاتجاه العام يتجه نحو الزيادة فإن هذا الفرق يكون موجباً وإذا كان نحو النقصان فإنه يكـون سـالباً ولهذا فمن المنطقي أن يمثل تقديراً للاتجاه العام في الزمن $t-1$. وتقوم المعادلة (٤ , ٥) التي مهمتها تمهيد الاتجاه العام ، بأخذ الاتجاه العام في الزمن **t** أى b_t كوسـط مـرجح بين هذا التقدير والاتجاه العام في الزمن السابق b_{t-1}.

إذا كتبنا المعادلة (٤ , ٥) التي هى في الواقع معادلة تمهيد أسى مفرد مطبقة على الاتجاه العام – بالشكل: $b_t = b_{t-1} + \gamma\big((S_t - S_{t-1}) - b_{t-1}\big)$

نرى أن الاتجاه العام في الزمن **t** يتم الحصول عليه بتعديل الاتجاه العـام السـابق b_{t-1} بإضافة الفرق بين أحدث تقدير $S_t - S_{t-1}$ و b_{t-1} (بعد الضرب في γ). فإذا كان b_{t-1} أقل من $S_t - S_{t-1}$ تتم رفع قيمته بإضافة القيمة الموجبـة $S_t - S_{t-1} - b_{t-1}$

إليه وإذا كان أكبر تخفض قيمته بإضافة القيمة السالبة. وبهذا يحدَّث الاتجاه العام ويطور مع كل تمهيد جديد.

أما المعادلة (٤,٦) فتستخدم للتنبؤ من الزمن t لـm وحده زمنية للأمام. وليمكن استخدام المعادلات (٤,٤)-(٤,٦) في التنبؤ لابد من الحصول على قيم ل S_1 و b_1 إذا لا توجد قيم ل S_0 و b_0 يمكن استخدامها للحصول عليهما من (٤,٤) و (٤,٥). وبالتالي لا يمكن الانطلاق للتنبؤ في الفترات اللاحقة . بالنسبة ل S_1 جرى العرف على أخذ $S_1 = Y_1$. أما بالنسبة ل b_1 فهناك عدة طرق منها :

$$b_1 = Y_2 - Y_1 \quad \text{و} \quad b_1 = \frac{(Y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_2) + (Y_4 - Y_3)}{3}$$

وبمجرد تحديد قيمة ل b_1 و S_1 يمكن إجراء التنبؤ للفترات التالية كما يوضح المثال (٤,٥) أدناه. لاحظ أنه لا يوجد تنبؤ في الفترات ١ و ٢ لأننا افترضنا أن قيمها Y_1 و Y_2 معروفة واستخدمت في تقدير S_1 و b_1.

مثال (٤,٥)

العمود الثاني بجدول (٤,٣) يبين المبيعات السنوية لشركة خلال ٦ سنوات. مستخدماً $\alpha = 0.2$ و $\gamma = 0.3$ تنبأ بالقيم في السنوات ١٩٨٦-١٩٨٩.

رقم السنة (t)	السنة	المبيعات Y_t بملايين الجنيهات	S_t	b_t	F_t	خطأ التنبؤ e_t	التنبؤ بالتمهيد الأسى المفرد	الخطأ في التمهيد المفرد
١	١٩٨٤	١٤	١٤,٠	٢				
٢	١٩٨٥	١٦	١٦,٠	٢				
٣	١٩٨٦	٢٠	١٨,٤٠	٢,١٢	١٨	٢,٠	١٨,٤٥	١,٥٥
٤	١٩٨٧	٢٤	٢١,٢١	٢,٣٣	٢٠,٥٢	٣,٤٨	١٨,٧٦	٥,٢٤
٥	١٩٨٨	٢٢	٢٣,٢٣	٢,٢٤	٢٣,٥٤	-١,٥٤	١٩,٨٠	٢,٢
٦	١٩٨٩	٢٦	٢٥,٥٨	٢,٢٧	٢٥,٤٧	٠,٥٣	٢٠,٢٤	٥,٧٦

جدول (٤,٣)

سنأخذ $S_1 = Y_1 = 14$ و $b_1 = Y_2 - Y_1 = 2$.

من (٤ ,٤) و (٥ ,٤) نجد بالترتيب للسنة الثانية :

$$S_2 = \alpha Y_2 + (1-\alpha)(S_1 + b_1)$$
$$= 0.2 \times 16 + 0.8(14-2) = 16$$

و $$b_2 = \gamma(S_2 - S_1) + (1-\gamma)b_1$$
$$= 0.3(16-14) + 0.7 \times 2 = 2$$

في السنة ٣ نحسب المقادير :

$$S_3 = 0.2Y_3 + (1-0.2)(S_2 + b_2)$$
$$= 0.2 \times 20 + 0.8(16+2) = 18.4$$
$$b_3 = 0.3(18.4-16) + 0.7 \times 2 = 2.12$$

التنبؤ في السنة ٣ باستخدام (٦ ,٤) من السنة ٢ :

$$F_3 = S_2 + b_2 \times (1) = 16 + 2 \times 1 = 18$$

في السنة ٤ نحسب

$$S_4 = 0.2 \times 24 + 0.8(18.4 + 2.12) = 21.21$$
$$b_4 = 0.3(21.21 - 18.4) + 0.7 \times 2.12 = 2.33$$

التنبؤ في السنة ٤ من السنة ٣ :

$$F_4 = S_3 + b_3 \times (1) = 18.4 + 2.12 \times 1 = 20.52$$

وهكذا نجد بقية القيم في العمود الرابع والخامس والسادس.

ويوضح العمود قبل الأخير التنبؤ بالتمهيد الأسى المفرد بأخذ F_1 تساوي متوسط القيم ال٦ وهو ٢٠,٣٣ وبأخذ $\alpha = 0.2$. وبمقارنة أخطاء التنبؤ في حالة التمهيد الأسى المفرد (العمود الأخير) بنظيرتها في التمهيد المزدوج نلاحظ أن الأخطاء في التمهيد المزدوج أقل كثيراً (باستثناء حالة واحدة) منها في التمهيد المفرد. وهذا ليس بمستغرب لأن السلسلة المعطاة تحوى اتجاهاً عاماً وهو ما لا يعالج أثر وجوده التمهيد المفرد.

٤,٥,٣ التمهيد الأسى الثلاثي لوينترز

Winter's three-parameter exponential smoothing method

عندما يكون بالسلسلة الزمنية تغيرات موسمية فإن الطرق السابقة لا يتوقع أن تؤدي لتنبؤ يقترب من الواقع لأنها لا تضع في الاعتبار التغيرات الموسمية. ممكن بالطبع التخلص من التغيرات الموسمية بطرق مثل تلك التي ذكرناها في الباب الثاني قبل استخدام طرق التمهيد السابقة.

طريقة وينترز للتمهيد الأسى تعالج مشكلة الموسمية كما تعالج أيضاً مشكلة الاتجاه العام إن وجد. لهذا تستخدم عادة عندما يكون بالسلسلة تأثير موسمي. وتعتمد الطريقة على ثلاثة ثوابت تمهيد α ، γ و β تتراوح قيمة كل منها بين الصفر والواحد والمعادلات الأربعة التالية :

$$S_t = \alpha \frac{Y_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) \qquad \text{... (٤,٧)}$$

$$b_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1+\gamma)b_{t-1} \qquad \text{... (٤,٨)}$$

$$I_t = \beta \frac{Y_t}{S_t} + (1-\beta) I_{t-L} \qquad \text{... (٤,٩)}$$

$$F_{t+m} = (S_t + b_t m) I_{t-L+m} \qquad \text{... (٤,١٠)}$$

حيث L طول فترة التكرار الموسمي ، I الدليل الموسمي (أو العامل الموسمي) وحيث بقية الرموز كما في طريقة هولت.

المعادلة (٤,٧) تقوم بتمهيد قيم السلسلة كما تفعل المعادلة (٤,٤) في طريقة هولت مع فارق أساسي هو تخليص القيمة Y_t من التأثير الموسمي أولاً بقسمتها على الدليل الموسمي الخاص بالفترة t والذي يكون قد تم حسابه قبل L فترة ويرمز له ب I_{t-1}.

مثلاً إذا كانت السلسلة شهرية وهناك تأثير موسمي يتكرر كل ١٢ شهر أي $L=12$ ، وإذا كانت t تقابل شهر مارس في سنة ما فإن الدليل الموسمي الخاص بشهر مارس

يكون قد حسب في مارس من السنة السابقة أي قبل ١٢ شهر لهذا تقسم Y_t على I_{t-12} . لاحظ أن الدليل الموسمي الخاص بأي موسم (مثلاً شهر) ليس قيمة واحدة ثابتة تحسب مرة واحدة وتستخدم كدليل على تأثير الموسم متى تكرر كما فعلنا في طريقة التفكيك التقليدية بالباب الثاني. ولكن الدليل الموسمي في طريقة وينترز يجدد ويطور مع الزمن.

أما المعادلة (٤ , ٨) فهي تمهد الاتجاه العام وهي تتطابق تماماً مع المعادلة (٤ , ٥) في طريقة هولت. في المعادلة (٤ , ٩) ، S_t قيمة ممهدة أو متوسط وبالتالي خالية من التأثير الموسمي وقسمة Y_t عليها يعطينا بالتالي تقديراً للتأثير الموسمي في الزمن **t**. ولأن هذا المقدار عرضه لتغيرات عشوائية يتم تمهيده بأخذ متوسط مرجح له وآخر دليل موسمي I_{t-1}. إذا كتبنا (٤ , ٩) بالشكل

$$I_t = I_{t-L} + \beta\left(\frac{Y_t}{S_t} - I_{t-L}\right)$$

نرى أن الدليل الموسمي في الزمن **t** عبارة عن الدليل الموسمي في الزمن $t-L$ بعد تعديله بإضافة الفرق بينه وآخر تقدير له $\frac{Y_t}{S_t}$ (بعد الضرب في β) إليه.

أخيراً المعادلة (٤ , ١٠) للتنبؤ **m** فترة للإمام. لاحظ أن آخر دليل موسمي تم حسابه للموسم المقابل ل $t+m$ هو I_{t+m-L}. لهذا كان الضرب في I_{t-L+m} لوضع التأثير الموسمي في الاعتبار عند التنبؤ.

ولبدء طريقة وينترز نحتاج لبيانات في السلسلة الزمنية لموسمين كاملين على الأقل ، أي **٢L** قيمة . ذلك أننا نحتاج لل **٢L** قيمة الأولى في السلسلة لإيجاد تقدير مبدئي للاتجاه العام والذي يقدر من

$$b = \frac{1}{L}\left[\frac{(Y_{L+1} - Y_1)}{L} + \frac{(Y_{L+2} - Y_2)}{L} + \ldots + \frac{(Y_{L+L} - Y_L)}{L}\right]$$

وبما أن كل حد داخل القوس الكبير هو تقدير للاتجاه العام في فترة طولها L فإن القيمة المبدئية لـb حسب هذه القاعدة هي متوسط هذه التقديرات .

كذلك ، لإيجاد قيم مبدئية للعامل الموسمي في الـL فترة الأولي نوجد متوسطها

$$M = \frac{1}{L}\left[Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_L\right]$$

وتكون قيم العامل الموسمي في الـL فترة الأولي :

$$I_1 = \frac{Y_1}{M}, I_2 = \frac{Y_2}{M}, \ldots, I_L = \frac{Y_L}{M}$$

لاحظ أننا لا نستطيع أن نبدأ التمهيد قبل الفترة $L+1$ لأنه فقط ابتداءاً من الفترة $L+1$ تكون لدينا قيمة للدليل الموسمي I_{t-L} أى I_1 ليمكن استخدام المعادلة (٤,٧). نحتاج إذن أيضاً لقيمة مبدئية ل S_L. وهناك عدة طرق لإيجاد قيمة بداية ل S_L منها استخدام وسط مرجح بمعاملات ذو الحدين لل L قيمة الأولي في السلسلة الزمنية. مثلاً إذا كانت $L = 4$ فبما أن معاملات ذو الحدين لـ$n = 3$ هى ١,٣,٣,١ فإن :

$$S_L = \frac{1 \times Y_1 + 3 \times Y_2 + 3 \times Y_3 + 1 \times Y_4}{1+3+3+1}$$

والمثال التالي يوضح كيفية التنبؤ باستخدام طريقة وينترز للتمهيد الأسى.

مثال (٤,٦)

جدول (٤ , ٤) يوضح عدد السيارات التي مرت بنقطة (بالعشرات) في كل من ثلاثة فترات من اليوم A،B وC في ثلاثة أيام متتالية.

اليوم	الفترة	الرقم التسلسلي للفترة (t)	عدد السيارات Y_t	S_t	b_t	I_t
١	A	١	١٠			١,٢٥
	B	٢	٦			٠,٧٥
	C	٣	٨	٧,٥٠	٠,٢٢	١,٠٠
٢	A	٤	١٠	٧,٧٨	٠,٢٣	١,٢٥
	B	٥	٧	٨,٢٧	٠,٢٦	٠,٧٦
	C	٦	٩	٨,٦٢	٠,٢٧	١,٠٠
٣	A	٧	١١	٨,٨٧	٠,٢٧	١,٢٥
	B	٨	٩	٩,٧٠	٠,٣٣	٠,٧٧
	C	٩	١٠	١٠,٠٣	٠,٣٣	١,٠٠

جدول (٤ , ٤)

سنستخدم ثوابت التمهيد $\alpha = 0.2$ ، $\gamma = 0.1$ و $\beta = 0.06$. في هذا المثال الموسم هو الفترة وبالتالي $L = 3$. نحتاج لقيم لكل من b_3، I_1، I_2، I_3 و S_3 لنبدأ التمهيد.

أولاً: قيمة b_3 :

$$b_3 = \frac{1}{L \times L}\left[(Y_4 - Y_1) + (Y_5 - Y_2) + (Y_6 - Y_3)\right]$$

$$= \frac{1}{9}[0 + 1 + 1] = 0.22$$

ثانياً : لإيجاد I_1، I_2 و I_3 نحسب متوسط القيم الثلاث الأولي :

$$M = \frac{10 + 6 + 8}{3} = 8$$

وبقسمة كل من القيم الثلاث الأولي على ٨ نحصل على :

$$I_1 = \frac{Y_1}{8} = \frac{10}{8} = 1.25, I_2 = \frac{Y_2}{8} = \frac{6}{8} = 0.75, I_3 = \frac{Y_3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

ثالثاً: S_3 نحصل عليها بأخذ متوسط القيم الثلاث الأولى مرجحة بعاملات ذوالحدين

$$S_3 = \frac{1*10 + 2*6 + 1*8}{1+2+1} = 7.5$$

:١ , ٢ , ١

يمكننا الآن أن نبدأ التمهيد باستخدام المعادلات (٧ , ٤) ـ (٩ , ٤)

في الفترة ٤ :

$$S_4 = \alpha \frac{Y_4}{I_{4-3}} + (1-\alpha)(S_3 + b_3)$$

$$= 0.2 \times \frac{10}{1.25} + 0.8(7.5 + 0.22) = 7.78$$

$$b_4 = \gamma(S_4 - S_3) + (1-\gamma)b_3$$

$$= 0.1(7.78 - 7.5) + 0.9 \times 0.22 = 0.23$$

$$I_4 = \beta \frac{Y_4}{S_4} + (1-\beta)I_{4-3}$$

$$= 0.06 \times \frac{10}{7.78} + 0.94 \times 1.25 = 1.25$$

في الفترة ٥ :

$$S_5 = \alpha \frac{Y_5}{I_{5-3}} + (1-\alpha)(S_4 + b_4)$$

$$= 0.2 \times \frac{7}{0.75} + 0.8(7.78 + 0.23) = 8.27$$

$$b_5 = \gamma(S_5 - S_4) + (1-\gamma)b_4$$

$$= 0.1(8.27 - 7.78) + 0.9 \times 0.23 = 0.26$$

$$I_5 = \beta \times \frac{Y_5}{S_5} + (1 - \beta) I_{5-3}$$

$$= 0.06 \times \frac{7}{8.27} + 0.94 \times 0.75 = 0.76$$

وهكذا لبقية الفترات.

للتنبؤ من الفترة ٦ بالقيمة في الفترة ٨ نستخدم المعادلة (١٠ , ٤) بأخذ $m = 2$ ، $t = 6$ و $L = 3$

$$F_{t+m} = (S_t + b_t \times m) I_{t-L+m}$$

$$F_8 = (S_6 + b_6 \times 2) \times I_5$$

$$= (8.62 + 0.27 \times 2) \times 0.76 = 6.96$$

لاحظ أننا قد افترضنا ضمناً في طريقة وينترز التي استخدمناها النموذج الضربى: $Y_t = T_t \times S_t \times e_t$

ولكن ذلك لا يمنع - إذا كانت طبيعة السلسلة تستدعي ذلك - أن يكون النموذج المستخدم جمعي. كذلك قد لا يكون بالسلسلة الزمنية اتجاه عام وإنما تأثير موسمي فقط.

عندما تكون السلسلة الزمنية خاضعة لتأثير موسمي فقط (بدون اتجاه عام) يمكن استخدام ما يسمى بالتمهيد الأسى الموسمي البسيط **Simple seasonal exponential smoothing** والذي يتم من خلال المعادلات:

$$S_t = \alpha(Y_t - I_{t-L}) + (1 - \alpha) S_{t-1} \qquad \text{...١}$$

$$I_t = \delta(Y_t - S_t) + (1 - \delta) I_{t-L} \qquad \text{...٢}$$

$$F_{t+m} = S_t + I_{t+m-L} \qquad \text{...٣}$$

حيث α و δ ثوابت تمهيد.

٤, ٥, ٤ ملاحظات عامة عن طرق التمهيد الأسى

١. في كل طرق التمهيد الأسى التي ناقشناها افترضنا أن الاتجاه العام خطى. لكن هناك حالات لا يكون فيها الاتجاه العام خطياً ومنها

أ. الاتجاه العام الأسى: في هذه الحالة يكون معدل النمو أو الانخفاض في السلسلة أسرع مما يعكسه الخط المستقيم.

ب. الاتجاه العام المتضائل Damped trend: وفيه يكون معدل النمو في السلسلة الزمنية أبطأ مما يمثله الخط المستقيم.

٢. ثوابت التمهيد تحدد السرعة التي تتناقص بها الأوزان المعطاة لقيم السلسلة ونحن نتجة نحو القيم الأقدم. فالقيمة الصغيرة (مثلاً قرب الصفر) تسمح للقيم البعيدة للتأثير بشكل أكبر.

٣. تحديد ثابت التمهيد يتم بإحدى طريقتين:

أ. طريقة تعتمد على التقدير الشخصي : وفق هذه الطريقة يحدد الثابت حسب ما نعتقد أنه حادث في السلسلة. فإذا كنا نعتقد أن السلسلة (أو بدقة أكبر الآلية المولدة لها) قد حدثت فيها تغيرات كبيرة أخيراً نميل لاختيار ثابت تمهيد قرب الواحد مثلاً ٩, ٠. أما إذا كنا نرى أن السلسلة مستقرة لدرجة كبيرة فقد نستخدم ثابتاً في حدود ١, ٠.

ب. طريقة موضوعية: وفيها نترك للسلسلة الزمنية توجيهنا في اختيار ثابت التمهيد ، وذلك بتجربة عدة قيم للثابت واختيار القيمة التي تعطى أفضل تنبؤ وفق معيار مناسب مثلاً متوسط مربعات الخطأ.

٤. تتميز طرق التمهيد الأسى بأنها تستخدم معادلة تنبؤ متطورة ، تعطي فيها القيم الأحدث وزناً أكبر ويطور فيها الاتجاه العام (كما في طريقة هولت) أو الاتجاه العام والدليل الموسمي (كما في طريقة وينترز). فهى بالتالي تستند – في حالة الاتجاه العام – على معادلة اتجاه عام محلية Local trend equation بدلاً من معادلة اتجاه عام عامة global trend equation.

٤,٥,٥ التمهيد الأسى باستخدام الحاسب

لتنفيذ طرق التمهيد الأسى المفرد و الثنائي الهولت والثلاثي لوينترز باستخدام حزمة SPSS يتم إتباع الخطوات الآتية:

١. تدخل السلسلة الزمنية.بالنسبة لطريقة وينترز يجب أيضاً تحديد الوحدات الزمنية بالتأشير على Define dates في شريط الخدمة ثم استخدام الصفة التي تنطبق على البيانات. مثلاً Years months . ولا تنفذ طريقة وينترز ما لم تجرى هذه الخطوة.

٢. أشر على Analyze في شريط الخدمة واختار Forecasting أو time series. وعندما تنزل قائمة اختار create models .

٣. في النافذة التي تفتح أنقل متغير السلسلة إلى مستطيل Dependent variable.

٤. أشر على المكان المكتوب فيه Expert modeler واختار Exponential smoothing

٥.أشر على criteriaوعندما تفتح نافذة أشر على الطريقة التى تريد : المفرد ، هولت ... الخ ثم Continue.

٦. عندما ترجع للنافذة الأولي أشر على statistic وأشر على الإحصائيات التي تريد وأهمها R^2 و root mean square error و parameter estimates.

٧. أشر على plots في شريط الخدمة واختار أن يرسم لك السلسلة ، Forecasts، Fit values وفترات الثقة .

٨. يمكن طلب الExpert modeler ليختار لك أفضل نموذج تمهيد أسى.

الباب الخامس

النماذج الخطية المستقرة

Linear Stationary Models

٥,١ مقدمة

في هذا الباب نتعرف على مجموعة هامة من نماذج السلاسل الزمنية تسمي النماذج الخطية المستقرة. وهي نماذج لا تتغير فيها الخصائص الإحصائية للسلسلة الزمنية مع الزمن .هذه النماذج هي التي يمكن فيها إجراء الاستدلال الإحصائي (من تقدير واختبار فرض) بكفاءة .وفي الباب السادس سنتعرض للنماذج غير المستقرة ، والتي يجب أن تحول لمستقرة ليمكن إجراء الاستدلال الإحصائي عليها بالكفاءة المطلوبة .وقبل أن نتناول هذه النماذج نتعرف أولاً على بعض الرموز والمصطلحات الهامة.

٥,٢ مشغل الإزاحة ومشغل الفرق Shift operator & Difference operator

للسلسلة الزمنية $\{Y_t\}$ يعرف مشغل الإزاحة للخلف **Backward shift operator** ويرمز له ب B كما يلي :

$$BY_t = Y_{t-1}$$

أي أنه يُرجع المشاهدة فترة زمنية واحدة للوراء .ويمكن استخدام B بشكل مكرر فمثلاً :

$$B(BY_t) = B^2Y_t = Y_{t-2}$$

يُرجع المشاهدة فترتين زمنيتين للخلف. في بعض الأحيان نحتاج لمشغل يقوم بالعملية العكسية أى ينقل المشاهدة فترة للأمام..يسمي هذا مشغل الإزاحة للأمام ويرمز له ب $F = B^{-1}$ ويعرف شكلياً :

$$FY_t = Y_{t+1}$$

من ناحية أخري يمكن أن نعرف مشغل للفرق ونرمز له ب ∇ بحيث :

$$\nabla = 1 - B$$

وبالتالي نجد أن
$$\nabla Y_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

هو في الواقع الفرق بين القيمة في الزمن t والقيمة في الزمن قبلها. يسمى هـذا الفـرق الأول **first difference**. الفرق الثاني **second difference** هـو الفـرق بـين القيمة في الزمن t والقيمة التي تسبقها بفترتين زمنيتين أى :

$$Y_t - Y_{t-2} = \left(1 - B^2\right)Y_t$$

عموماً الفرق **d**:

$$Y_t - Y_{t-d} = \left(1 - B^d\right)Y_t$$

إذا أخذنا الفرق الأول للفرق الأول نحصل على

$$Y_t - Y_{t-1} - \left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$
$$= \left(1 - 2B + B^2\right)Y_t = (1-B)^2 Y_t = \nabla^2 Y_t$$

يسمى هذا الفرق ذو الرتبـة ٢ **second-order difference** وهـو يختلـف عـن الفرق الثاني الذي هو مجرد الفرق بين القيمـة والـتي تسـبقها بوحـدتين زمنيـتين. وفي الحالة العامة إذا أجرينا عملية أخذ الفرق الأول **d**مرة يكون لدينا الفرق ذو الرتبة **d**.

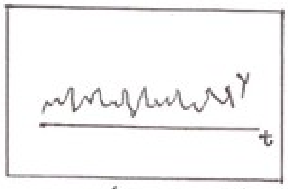
والهدف عادة من عملية أخذ فروق هو جعل السلسلة الزمنية مستقرة بالمفهوم الذي سنشرحه بعد قليل.

٥,٣ الإستقرار Stationarity يقال أن العملية التصادفية مستقرة بشكل كامل **strictly stationary** إذا كانت جميع خصائصها الإحصائية لا تتغير مع الزمن .ويعني ذلك أننا إذا أجرينا المشاهدات $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ في الأزمنة $t_1, t_2, \ldots, t_n$ فإن دالة كثافة الإحتمال المشتركة لها تتطابق مع تلك التي للمشاهدات $Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \ldots, Y_{t_n+m}$ المأخوذة في الأزمنة $t_{1+m}, t_{2+m}, \ldots, t_{n+m}$.

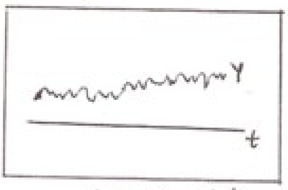
وتوصف أى سلسلة زمنية تولدت عن هذه العملية التصادفيه بأنها مستقرة بشكل كامل . وبما أنه يتعذر في الواقع العملي التحقق من وجود الاستقرار الكامل فإنه يكتفي عادة بما يسمي بالاستقرار الضعيف **weak stationarity** والذي يتطلب فقط أن يكون متوسط العملية وتباينها لا يتغيران مع الزمن (ثوابت) وأن

السلاسل الزمنية التغاير بإبطاء **k** يعتمد فقط على فارق الزمن **k** وليس على الزمن. أى لا يتغير مع الزمن إذا كانت **k** ثابتة. وفي أدبيات السلاسل الزمنية جرى العرف على استخدام "مستقرة " للعملية التصادفيه (وبالتالي السلسلة المتولده عنها) التي تحقق الاستقرار الضعيف. وهذا ما سنتبعه في هذا الكتاب.

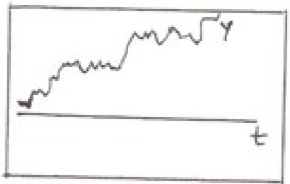
وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن أحياناً من رسم السلسلة الزمنية تبين ما إذا كانت السلسلة مستقرة من حيث المتوسط أو من حيث التباين .وتكون السلسلة مستقرة من حيث المتوسط **stationary in the mean** إذا كانت لا تظهر تغيراً في المتوسط مع الزمن (شكل **٥.a**). وتكون مستقرة من حيث التباين اذا لم يظهر تغير في التباين (شكل **٥.b**). أما شكل (**٥.c**) و شكل (**٥.d**) فتظهران



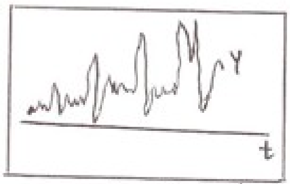
شكل (5.a)



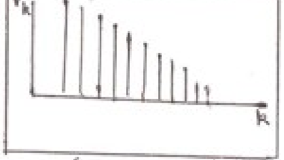
شكل (5.b)



شكل (5.c)



شكل (5.d)



شكل (5.e)

عدم استقرار في المتوسط والتباين بالترتيب. كذلك إذا كانت السلسلة مستقرة فإن

معامل الارتباط الذاتي لن يكون كبيراً بعد إبطاء أو اثنين أما اذا كانت السلسلة غير مستقرة فإن عدد معاملات الارتباط الذاتي تكون معنوية لعدد كبير من الابطاءات وقد تأخذ شكل اتجاه عام . كما في شكل (e)٥.

ويعالج عدم الاستقرار في المتوسط بأخذ فرق مناسب*.كما يعالج عدم الاستقرار في التباين باستخدام تحويله مناسبة.

ملحوظة :

إذا كانت السلسلة مستقرة فإن دالة التغاير ودالة الارتباط الذاتي تحققان $\gamma_k = \gamma_{-k}$ و $\rho_k = \rho_{-k}$ بالترتيب أى هما دوال زوجية في **k** .

البرهان :

بما أن $\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k})$ لا يعتمد على **t** فانه بوضع $t = t - k$ نجد أن: $\gamma_k = \text{cov}(Y_{t-k}, Y_{t-k+k}) = \text{cov}(Y_{t-k}, Y_t) = \gamma_{-k}$

٤ , ٥ القابلية للعكس Invertibility

رأى يول ((١٩٢٧) **Yule**) أن السلسلة الزمنية التي ترتبط قيمها المتتالية ببعضها يمكن اعتبارها قد تولدت من سلسلة من الهزات **shocks** المستقلة **e**. وأن هذه الهزات تمثل مشاهدات عشوائية من توزيع معين (عادة يفترض التوزيع الطبيعي) بمتوسط صفر وتباين σ_e^2. ويسمى التتالي $e_1, e_{t-1}, e_{t-2}, \ldots$ عادة عملية الضجة البيضاء **white noise process** . هذه الضجة البيضاء يفترض أنها قد تحولت للمشاهدات Y_t بالسلسلة من خلال ما يسمى بالمصفاة الخطية **linear filter** والتي تقوم بأخذ مجموع مرجح للقيم السابقة لـ**e** بحيث يعطينا القيمة الحالية لـ**Y**. بمعنى آخر :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_1 e_{t-2} + \ldots \\ &= \mu + \psi(B) e_t \end{aligned}$$

* هناك طرق أخرى ذكرنا بعضها في الباب الثانى.

حيث μ متوسط أو مستوى العملية Y_t و

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots$$

لنفرض الآن أن لدينا العملية البسيطة

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta e_{t-1} = (1 - \theta B) e_t \qquad \ldots(٥,١)$$

حيث $\tilde{Y}_t$ تمثل انحراف Y_t عن متوسط العملية μ .

إذا كتبنا (٥,١) بالشكل

$$e_t = (1 - \theta B)^{-1} \tilde{Y}_t$$

وطبقنا البديهية :

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

نخلص إلى

$$e_t = \tilde{Y}_t + \theta \tilde{Y}_{t-1} + \theta^2 \tilde{Y}_{t-2} + \theta^3 \tilde{Y}_{t-3} + \ldots$$

أو

$$\tilde{Y}_t = e_t - \theta \tilde{Y}_{t-1} - \theta^2 \tilde{Y}_{t-2} - \theta^3 \tilde{Y}_{t-3} - \ldots$$

ولكن إذا كان $|\theta| \geq 1$ فإن $\tilde{Y}_t$ (التي تعتمد على القيم السابقة ل $\tilde{Y}$) ستكون لانهائية لأن أوزان $\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{Y}_{t-2}, \tilde{Y}_{t-3} \ldots$ تتزايد كلما زاد الإبطاء. لهذا نحتاج لأن نتفادى مثل هذا الوضع بإضافة الشرط $|\theta| < 1$. هذا يجعل السلسلة $(1 - \theta B)^{-1}$ تتقارب. نصف السلسلة في هذه الحالة بأنها تتميز بالقابلية للعكس **invertibility** أو أنه يمكن عكسها.

خاصية القابلية للعكس مستقلة عن خاصية الاستقرار ، وسنحتاجها لاحقاً في نقاشنا لنماذج السلاسل الزمنية.

٥,٥ عملية الانحدار الذاتي Autoregressive Process

عمليـــة (أو نمـــوذج) الانحـــدار الـــذاتي برتبـــة **p** ، ويرمـــز لهـــا اختصـــاراً

ب$AR(p)$ هي عملية ينظر فيها للقيمة Y_t كدالة في القيم السابقة لـ**Y** حتى إبطاء **p** مع وجود خطأ عشوائي e_t وثابت μ. وهي تأخذ الشكل :

...(٥,١a)

$$Y_t=\mu+\phi_1(Y_{t-1}-\mu)+\phi_2(Y_{t-2}-\mu)+...+\phi_p(Y_{t-p}-\mu)+e_t$$

بوضع $\widetilde{Y}=Y-\mu$:

$$\widetilde{Y}_t=\phi_1\widetilde{Y}_{t-1}+\phi_2\widetilde{Y}_{t-2}+...+\phi_p\widetilde{Y}_{t-p}+e_t \qquad ...(٥,١b)$$

وهي تشبه معادلة الانحدار مع الاختلاف في أن المتغيرات "المستقلة" هي القيم السابقة للمتغير ذاته ، ومن هنا كانت التسمية "انحدار ذاتي".

١,٥,٥ نموذج الانحدار الذاتي برتبة ١ AR(١)

لعل أهم نموذج انحدار ذاتي هو النموذج ذو الرتبة ١ :

$$Y_t=\mu+\phi(Y_{t-1}-\mu)+e_t \qquad ...(٥,٢)$$

والذي يفترض فيه أن قيمة السلسلة في الزمن **t** تعتمد على القيمة في الزمن $t-1$ (بالإضافة للخطأ). لندرس بعض خصائص هذا النموذج دعنا نعوض عن Y_{t-1} في (٥,٢) بقيمتها بدلالة Y_{t-2} وعن Y_{t-2} بقيمتها بدلالة Y_{t-3} هذا يؤدي إلى

$$\begin{aligned}Y_t&=\mu+\phi\left[\mu+\phi(Y_{t-2}-\mu)+e_{t-1}-\mu\right]+e_t\\&=\mu+\phi\left[\phi(\mu+\phi(Y_{t-3}-\mu)+e_{t-2}-\mu)+e_{t-1}\right]+e_t\\&=\mu+\phi^3(Y_{t-3}-\mu)+\phi^2e_{t-2}+\phi e_{t-1}+e_t\\&=\mu+\phi^3(Y_{t-3}-\mu)+\sum_{j=0}^{3-1}\phi^je_{t-j}\end{aligned}$$

وإذا إستمرينا في التعويض حتى أبطاء **t** لنصل لـ Y_0 نجد أن (٥,٢) يمكن كتابتها بالشكل :

$$Y_t=\mu+\phi^t(Y_0-\mu)+\sum_{j=0}^{t-1}\phi^je_{t-j} \qquad ...(٥,٣)$$

بافتراض أن ال $e's$ غير مرتبطة ولكل منها متوسط ٠ نجد بأخذ توقع الطرفين :

$$\mu_t = \mu + \phi^t (\mu_0 - \mu) \qquad ...(٥,٤)$$

حيث $\mu_t = E(Y_t)$

كذلك بما أن الضجة البيضاء e_t غير مرتبطة وكل منها بتباين σ_e^2 فإن (حيث **V** ترمز لتباين)

$$V(Y_t) = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^{2j} \sigma_e^2 + \phi^{2t} V(Y_0)$$

$$= \sigma_e^2 \left(\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} \right) + \phi^{2t} V(Y_0) \qquad ...(٥,٥)$$

باستخدام بديهية كثيرة الحدود :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j$$

بوضع $x = \phi^2$ و $n = t-1$.

نلاحظ من (٥,٤) أن المتوسط لن يكون ثابتاً (مساوياً ل μ) في الحالة العامة لأن الحد الثاني يعتمد على الزمن **t** . نفس الشيء في (٥,٥) لن يكون التباين ثابتاً لاعتماده على **t** ما لم توضع شروط إضافيه . هذا يعنى أن نموذج الانحدار الذاتي برتبة ١ قد لا يكون مستقراً . سنرى فيما يلي أننا إذا افترضنا $|\phi| < 1$ فإن العملية **AR(١)** ستكون مستقرة. إذا وضعنا الشرط $|\phi| < 1$ فإن (٥,٤) تصبح ل**t** كبيرة:

$$\mu_t = \mu \qquad |\phi| < 1$$

كذلك يتلاشى الحد الثاني في (٥,٥) ويصبح الحـد الأول $\frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$. أى ان التبـاين يصبح ثابتاً أيضاً

$$V(Y_t)=\frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \qquad\qquad |\phi|<1$$

بالاستفادة من خصائص المتوالية الهندسية اللانهائية هذا يعنى أننا إذا نظرنـا للسلسـلة الزمنية المشاهدة على أنها نتجت عن عملية ظلت مستمرة لفترة طويلة وأن $|\phi|<1$ ، فإن السلسلة ستكون مستقرة منذ أخذ أول مشاهدة . عمومـاً أى عمليـة **AR(١)** لهـا تاريخ لا نهائي وبها $|\phi|<1$ تكون مستقرة .

إذا كتبنا (٥,٢) بشكل انحرافات عن المتوسط تكون :-

$$\tilde{Y}_t=\phi\tilde{Y}_{t-1}+e_t$$

باستخدام مشغل الإزاحة للخلف :

$$(1-\phi B)\tilde{Y}_t=e_t$$

وبمـا أن جـذر المعادلـة $1-\phi B=0$ (إذا نظرنـا لـ**B** كمـتغير صـوري) هـو $B=\phi^{-1}$ فان الشرط $|\phi|<1$ المطلوب للاستقرار يكافئ القول بأن جذر المعادلة المميزة $1-\phi B=0$ يجب أن يقع خارج دائرة الوحدة (أي يكون اكبر من واحـد عددياً).

ليكتمل إثبات الاستقرار يجب أن يكون التغاير أيضاً غير معتمد علـى الـزمن t . نلاحظ أولا أننا إذا استمرينا في تكرار التعويض عن قيم Y بـالقيم السـابقة كمـا فعلنا في الوصول إلى (٥,٣) فإننا سنحصل في النهاية إلى التمثيل :

$$Y_t=\mu+\sum_{j=0}^{\infty}\phi^j e_{t-j} \qquad\qquad \text{...(٥.ba)}$$

الآن التغاير بإبطاء **k**:

$$\gamma_k = \operatorname{cov}(Y_t, Y_{t+k})$$

$$= E\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t-j} - E(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t-j})\right) \times$$

$$\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t+k-j} - E(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t+k-j})\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t+k-j}\right)$$

لأن :

$$E\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E(e_t)$$

$$= \mu + 0 = \mu$$

كذلك يمكن كتابة

$$\gamma_k = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j'} e_{t-j} e_{t+k-j'}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j'} E\left(e_{t-j} e_{t+k-j'}\right)$$

لكن التوقع في الطرف الأيمن سيساوى صفر بسبب عدم ارتباط قيم **e**المختلفة ما لم تتساوى المؤشرات $t-j$ و $t = k - j'$ أي ما لم تكن $j' = j + k$ وهى الحالة التي يكون فيها التوقع مساوياً للتباين σ_e^2:

بالتالي $j' = j + k$ $\qquad E\left(e_{t-1} e_{t+k-j'}\right) = V(e_t) = \sigma_e^2$

$$\gamma_k = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+k} = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j+k}$$
$$= \sigma_e^2 \phi^k \sum_{j=1}^{\infty} \left(\phi^2\right)^j$$

وإذا كانت $|\phi| < 1$ فإن

$$\gamma_k = \sigma_e^2 \phi^k \left(\frac{1}{1-\phi^2}\right)$$
$$= \phi^k \gamma_0 \qquad \text{... (٥,٦b)}$$

باستخدام مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التي بها $|\phi| < 1$.

وبما أن الطرف الأيمن لا يعتمد على t فإن التغاير أيضا ثابت ، وهذا يكمل إثبات إن عملية الانحدار الذاتي برتبة ١ تكون مستقرة إذا تحقق الشرط $|\phi| < 1$. لاحظ أنه يمكن أيضاً استخدام (٥,٦a) لإثبات كل من المتوسط والتباين مباشرة.

٥,٥,٢ عمليه الانحدار الذاتي برتبة p

الحالة العامة لعملية الانحدار الذاتي والتي تكون فيها الرتبة p ويرمز لها بـAR(p) يأخذ فيها النموذج الشكل :

...(٥,٧)

$$Y_t = \mu + \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu\right) + \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu\right) + \ldots + \phi_p\left(Y_{t-p} - \mu\right) + e_t$$

ويمكن كتابته بدلاله مشغل الإزاحة للخلف :

$$\phi(B)\left(Y_t - \mu\right) = e_t$$

حيث :

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$$

وجدنا أن عملية الانحدار الذاتي برتبة ١ تكون مستقرة عندما يتحقق $1 < |\phi|$ وهو يعنى أيضاً في تلك العملية عندما يكون جذر المعادلة المميزة **characteristic equation** (أو الحل بالنسبة لـ**z**)

$$1-\phi z=0$$

اكبر عدديا من واحد. لاحظ أن جذر هذه المعادلة وهو **z** سيحقق $|z| > 1$ إذا تحقق $1 < |\phi|$.

في عمليه الانحدار الذاتي برتبة **P** نجد أيضاً انه إذا كانت العملية مستقرة فان جميع جذور المعادلة المميزة :

$$1-\phi_1 z-\phi_2 z-\ldots-\phi_p z=0$$

ستكون عددياً اكبر من ١ أي تقع خارج دائرة الوحدة. ومن الضروري أن نلاحظ ان كون جميع معاملات الانحدار الذاتي اقل من واحد عددياً لا يعنى بالضرورة أن العملية مستقرة إذ لابد من التأكد أيضاً من أن جميع جذور معادلة كثيرة الحدود المميزة تقع خارج دائرة الوحدة. في حالة **AR(١)** ، يؤدى تحقق احدهما للآخر كما رأينا. لإثبات انه إذا كانت العملية **AR(p)** مستقرة فان جميع جذور كثيرة الحدود المميزة يجب أن تكون اكبر من ١ ، نلاحظ انه إذا كانت السلسلة **Y** مستقرة فان تغايرها الذاتي

(بما أن μ ثابت وبالتالي لا يضيف للتغاير الذاتي) يحقق :

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= Cov(Y_t, Y_{t-k}) \\
&= Cov\left(\sum_{j=1}^{p}\phi_j Y_{t-j}+e_t, Y_{t-k}\right) \\
&= E\left\{\left[\sum_{j=1}^{p}\phi_j Y_{t-1}\right]\left[Y_{t-k}\right]\right\}-E\left[\sum_{j=1}^{p}\phi_j Y_{t-1}\right]E\left[Y_{t-k}\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \left[E\left(Y_{t-j} Y_{t-k}\right) - E\left(Y_{t-j}\right) E\left(Y_{t-k}\right) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j Cov\left(Y_{t-j}, Y_{t-k}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \, \gamma_{t-j-t+k}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \gamma_{k-j} \qquad k \geq p \; ...(٥,٨)$$

هذه معادله فروق من الدرجة **P** بمعاملات ثابتة وحلها هو

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{p} A_j z_j^{-k} \qquad k \geq 0 \; ...(٥,٩)$$

حيث $z_j \; (j = 1,..., p)$ جذور المعادلة المميزة و $A_1, A_2, ..., A_p$ ثوابت.

وبما أنه إذا $k \to \infty$ فان $\gamma_k \to 0$ (وهى حقيقة بديهيه لأننا لا نتوقع أن تكون قيم السلسلة التي تبعد عن بعضها بعداً كبيراً مرتبطة) وبما أن ال A_j ثوابت فإن (٥,٩) تقتضى أن تكون $\left| z_j \right| > 1$ لكل j .

في العملية **AR(١)** رأينا أن الاستقرار لا يتحقق ما لم يمكن كتابة Y_t بدلالـه مجموع متقارب من الضجة البيضاء* أو الهزات e_t ، وهو ما يتطلب أن تكون $|\phi| < 1$ في :

$$Y_t = \mu + \sum_{j}^{\infty} \phi^j e_{t-j}$$

وإذا كتبنا هذه العملية بالشكل البديل

$$\left(1 - \phi B\right)\left(Y_t - \mu\right) = e_t$$

نلاحظ أنها تكون مستقرة فقط إذا أمكن عكس $(1 - \phi B)$ والذي يتحقق

* لأن هذا فقط يضمن أن يكون التباين محدوداً.

عندما تكون $|\phi|<1$.

في حاله عمليه الانحدار الذاتي ذو الرتبة **p** والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\left(1-\phi B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p\right)\left(Y_t-\mu\right)=e_t$$

يمكن إثبات انه يمكن كتابتها أيضاً بالشكل :

$$\left(1-\frac{B}{Z_1}\right)\left(1-\frac{B}{Z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{B}{Z_p}\right)\left(Y_t-\mu\right)=e_t$$

حيث $Z_1,\ldots,Z_p$ جذور المعادلة المميزة (والتي يمكن لبعضها أن يكون مركباً).

من هذا نرى أنه ليمكن كتابة Y_t كمجموع متقارب فى الضجة البيضاء e_t لابد

من أن يكون ممكناً عكس كل الحدود $\left(1-\frac{B}{z_j}\right)$ حيـث $j=1,\ldots,p.$ وهـو ما يتيسر فقط إذا كانت $\left|z_j\right|>1$ لكل **j** . لاحظ أن عملية الانحـدار الـذاتي دائمـا قابلة للعكس (بالمعنى المشار إليه في الفصل الجزئي ٤ , ٥). ذلك أن السلسلة $\phi(B)$ محدودة ولاتحتاج لأى قيود على معاملات الانحدار لضمان قابلية العكس ، إذ يمكـن التعبير عن Y_t (أو e_t) بدلالة عدد محدود من قيم **Y** السابقة.

٥ , ٥ , ٣ اختبار الاستقرار

رأينا انه لتكون العملية **AR(١):**

$$\tilde{Y}_t=\phi\tilde{Y}_{t-1}+e_t$$

أو

$$(1-\phi B)\tilde{Y}_t=e_t$$

مستقرة لابد أن يتحقق :

$$|\phi|<1$$

وفي هذه الحالة يحقق جذر المعادلة المميزة :

$$1-\phi z=0$$

الخاصية $|z|>1$ لأن $z=\frac{1}{\phi}$. أما إذا كانت $|\phi|=1$ فإن $|z|=1$ وتكـون Y_t غير مستقرة. وفى هذه الحالة يمكن جعل السلسلة مستقرة بأخذ فـرق ذو رتبـة ١.

وفى الحالة العامة **AR(P)**، إذا كان في السلسلة الزمنية عدد **r** من جذور الوحدة **unit roots** (أي **r** جذر في المعادلة المميزة تساوي قيمة كل منها ١) فإننا نحتاج لأخذ **r**فرق أو فرق برتبة **r** للحصول على الاستقرار.

بما أن وجود جذر وحده في السلسلة الزمنية (أوالعملية التصادفيه المولدة لها) يعنى عدم استقرارها ، فان محاولات التحقق من عدم الاستقرار تركـز علـى محاولـه اختبـار وجود جذر وحده .وهناك عده اختبارات متوفرة لفرض العـدم بـأن هنـاك جـذر وحده ومـن هذه الاختبـارات اختبار سارقان – بهارقافا

Bhargava- Sargan واختبار فيليب– بـيرون (١٩٨٨) **Phllip - Peron** .

غـير أن أشـهر هـذه الاختبـارات هـو اختبـار ديكـى – فـولر(١٩٧٩) – **Dickey Fuller** وهو ما سنتناوله باختصار هنا.

نفرض أن لدينا العملية :

$$\tilde{Y}_t=\phi_*\tilde{Y}_{t-1}+e_t$$

حيث e_t ضجة بيضاء من توزيع بمتوسط ٠ وتباين σ_e^2 مستقلة عن بعـض وحيـث ϕ_* موجبه . في هذه الحـالة العبارة $\phi_*=1$ تـكافئ العبارة أن الجـذر في المعادلـة المميزة $1-\phi_* z=0$ يساوى ١ أيضاً .لهذا لاختبار وجود جذر وحـده يكفـى أن نختبر :

$$H_0:\phi_*=1 \quad \text{مقابل} \quad H_1:\phi_*<1$$

لاحـظ أننـا إذا رفضـنا H_0 لمصـلحة H_1 نسـتطيع بثقـة أن نـرفض الفـرض بـأن

$\phi_* > 1$. لاحظ أيضاً أن رفض H_0 يعنى قبول أن السلسلة الزمنية مستقرة.
اختبار ديكى وفولر لاكتشاف وجود جذر الوحدة تم التوصل إليه من تجربة محاكاة وفكرته الأساسية كما يلي :

(١) تفرض صحة H_0 أي توضع $\phi_* = 1$ في نموذج العملية ليصبح :

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_{t-1} + e_t$$

(٢) تسحب **n** قيمه من التوزيع الطبيعي لتمثل الضجة **e** وتسحب الواحدة تلو الأخرى وكلما سحبت قيمة استخدمت في $\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_{t-1} + e_t$ لتوليد قيمة ل $\tilde{Y}$.

ولتوضيح ذلك أفرض أننا بدأنا ب $\tilde{Y}_0 = e_0$ حيث e_0 قيمه مسحوبة من التوزيع الطبيعي إذا سحبنا القيمة e_1 تتولد لدينا القيمة $\tilde{Y}_1$ من $\tilde{Y}_1 = \tilde{Y}_0 + e_1$ وبعد سحب القيمة e_2 تتولد $\tilde{Y}_2$ من ... $\tilde{Y}_2 = \tilde{Y}_1 + e_2$ وهكذا حتى $\tilde{Y}_n$.

(٣) يجرى تحليل انحدار السلسلة الزمنية المتحصل عليها في (٢) بافتراض النموذج :

$$\tilde{Y}_t = \phi_* \tilde{Y}_{t-1} + e_t$$

وتقدر قيمة ϕ_* ، $\hat{\phi}_*$ مثلاً وخطأها المعياري $SE\left(\hat{\phi}_*\right)$ ومن ثم تحسب قيمة الإحصائية :

$$t' = \frac{\hat{\phi}_* - 1}{S\hat{E}\left(\hat{\phi}_*\right)}$$

(٤) تكرر الخطوات (١) – (٣) آلاف المرات وفى كل مرة تحسب قيمة t' . يمدنا ذلك بالتوزيع التكراري ل t' (توزيع ديكى – فولر).

(٥) تحدد القيم في التوزيع المشار إليه في (٤) التي تليها أو تسبقها نسبة (صغيرة) من القيم ، مثلاً ٪٥ , ٢ ، ٪٥،٪١،... . هذه القيم تمثل القيم الحرجة المقابلة لمستويات معنوية مختلفة والتي على أساسها يرفض فرض العدم بوجود جذر وحده (أي السلسلة غير مستقرة) أو لا يرفض .

بمعنى آخر أننا في اختبار ديكي- فولر نستخدم إحصائية t ولكن التوزيع المرجع هو توزيع ديكي- فولر وليس توزيع t المعروف. والسبب في ذلك أنه في حالة عدم استقرار السلسلة الزمنية فإن توزيع t' لن يتبع توزيع t وإنما يتبع توزيع ديكى – فولر. وقد وجد أن استخدام توزيع t يؤدى - في المتوسط – لرفض H_0 بمعدل أكبر.

وقد تم تعميم اختبار ديكى - فولر ليشمل اختبار وجود عدة جذور وحده في السلسلة الزمنية. ففي العملية

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_1 \tilde{Y}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + e_t$$

والتي يمكن كتابتها بدلالة الفرق الأول (حيث $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$):

$$\Delta\tilde{Y}_t = \phi^* \tilde{Y}_{t-1} + \phi_1 \Delta\tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \Delta\tilde{Y}_{t-2} + \ldots + \phi_{p-1} \Delta\tilde{Y}_{t-p+1} + e_t$$

حيث e_t يفترض أنها تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين σ^2 (هذا الافتراض يجعل مقدرات المربعات الصغرى تحتفظ بخصائص مقدراتها عند الاستدلال) وحيث :

$$\phi^* = (\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p) - 1$$

ويختبر اختبار ديكى – فولر الممتد **Augmented Dickey –Fuller test** فرض العدم $H_0 : \phi^* = 0$ مقابل الفرض البديل $\phi^* < 0$ فإذا رفض H_0 لمصلحة H_1 دعم هذا الادعاء . بأن السلسلة مستقرة.

٤ , ٥ , ٥معامل الارتباط الذاتي الجزئي The Partial autocorrelation coefficient

من المفاهيم الهامة في تحليل السلاسل الزمنية مفهوم معامل الارتباط الذاتي الجزئي .ويعرف معامل الارتباط الذاتي الجزئي ذو الإبطاء k ويرمز له ب ϕ_{kk}، بأنه معامل الارتباط الذاتي بين القيم في السلسلة الزمنية التي تبعد عن بعضها ب kفترة

زمنية مع إبقاء آثـار الإبطـاءات $1,2,...,k-1$ ثابتـة .بمعـني آخـر هـو الارتبـاط الشـرطي بـين Y_t و Y_{t+k} بشـرط $Y_{t+1},...,Y_{t+k-1}$ في الواقـع فـإن معامـل الارتباط الذاتي الجزئي بإبطاء **k** هو آخر معامل انحدار جزئي في عملية انحـدار ذاتـي برتبه **k** . فمثلا معامل الارتباط الذاتي الجزئي بإبطاء ٢، ϕ_{22}، هو المعامل ϕ_2 في العملية :

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$$

هذا يعني أن معامل الارتبـاط الـذاتي الجزئـي ϕ_{kk} في العمليـة **AR(p)** يكـون صفراً لكل $k > p$ إذ لا توجد حدود للإبطاءات $p+1, p+2,...$ في العملية.

وإذا نظرنا لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي كدالة في الإبطاء **k** يكون لدينا دالة الارتباط الذاتي الجزئي **partial autocorrelation function** واختصاراً **(PACF)** . وتلعب دالة الانحدار الذاتي الجزئي دوراً مهماً في التعريف بالنماذج في تحليل السلاسل الزمنية.

٥,٥,٥ دالة التغاير الذاتي ودالة الارتباط الذاتي لعملية الانحدار الذاتي

في معادلة (٥,٧) إذا حولنا μ للطرف الأيسـر وضـربنا طـرفي المعادلـة في $Y_{t-k}-\mu$ ثم أخذنا التوقع نحصل على :

$$E(Y_t-\mu)(Y_{t-k}-\mu)=\phi_1 E(Y_{t-1}-\mu)(Y_{t-k}-\mu)+\phi_2 E(Y_{t-2}-\mu)$$
$$(Y_{t-k}-\mu)+...+\phi_p E(Y_{t-p}-\mu)(Y_{t-k}-\mu)+E(e_t(Y_{t-k}-\mu))$$

أو

$$Cov(Y_t,Y_{t-k})=\phi_1 Cov(Y_{t-1},Y_{t-k})+...+\phi_p Cov(Y_{t-p},Y_{t-k})+Cov(e_t(Y_{t-k}-\mu))$$

بمعني آخر دالة التغاير الذاتي للعملية **AR(p)** تحقق معادلة الفروق :

....(٥,٩)

$$0 \le k \le p \quad \gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + ... + \phi_p\gamma_{k-p} + \sigma_e^2 I_k$$

حيث I_k متغير صوري يأخذ القيمة ١ إذا كانت $k=0$ و ٠ عدا ذلك.

إذا قسمنا (٥,٩) على التبـاين γ_0 نجـد أن دالـة الارتبـاط الـذاتي للعمليـة AR(p) تحقق معادلة الفروق من الرتبة **p** :

$$0 \le k \le p \qquad \text{......(٥,١٠)}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} + I_k \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}$$

وإذا عوضنا $k = 1,2,\ldots,p$ نحصل على ما يسمي بمعادلات يول –ووكر **Yule –Walker equations**:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p \rho_{p-2} \qquad \text{٥.١١)}$$

....

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \ldots + \phi_p$$

حيث استخدمنا النتيجة التي ذكرناها سابقاً من أنة في العمليات المستقرة يتحقق :

$$.\rho_k = \rho_{-k}$$

وتساعد معادلات يول – ووكر – بين أشياء أخـري – في تقـدير معـاملات الانحدار الذاتي كما سنري لاحقاً.

٥,٥,٦ طيف القوة **The Power Spectrum**

في عملية الانحدار الذاتي

$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + e_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + e_t$ حيـث $\tilde{Y}$ تعـني انحراف **Y** عن الثابت μ إذا عوضنا بالتتالي عن $\tilde{Y}_{t-1}$، $\tilde{Y}_{t-2}$ وهكذا نحصـل علـى سلسلة لا نهائية في الضجة أى أن العملية

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p\right)\tilde{Y}_t = e_t$$

أو $\phi(B)\tilde{Y}_t = e_t$

اختصـارا تكـافئ العمليـة الخطيـة (أو مـا يسـمى أحيانـا المصـفاه الخطيـة :(**Linear filter**

$$\tilde{Y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j} \qquad \ldots (٥,١٢)$$

$$= \psi(B) e_t$$

$$\psi(B) = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots + \ldots)$$

وحيث

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B) \qquad \ldots (٥,١٣)$$

الدالة المولدة للتغاير الذاتي **The autocovariance generatinig function**

للعملية الخطية (٥,١٢) تعرف :

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \qquad \ldots (٥,١٤)$$

وهى تعطى التغاير الذاتي ذو الرتبة **k** كمعامل B^k و B^{-k} .

إذا كان تباين e_t يساوي σ_e^2 لكل **t** فإن التغاير الذاتي بإبطاء **k** يكون :

$$\gamma_k = E\left[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t+k}\right] - E\left(\tilde{Y}_t\right) E\left[\tilde{Y}_{t+k}\right]$$

$$= E\left[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t+k}\right]$$

$$= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j'} e_{t-j} e_{t+k-j'}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} E\left(e_{t-j}^2\right)$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \qquad .... (٥,١٥)$$

ذلـك أنـه في الضـجة البيضـاء e يكـون $E(e_t) = 0$ لكـل t ممـا يجعـل $E(\widetilde{Y}_t) = 0$ من (٥,١٢) وبالتالي اختفاء الحد الثاني في المعادلة الأولـي. كـذلك بما أن e_t و $e_{t'}$ غير مرتبطتين إذا كانت $t \neq t'$ فإن $E(e_{t-j}e_{t+k-j'})$ يكـون صـفراً مـا لم يتسـاوي المؤشـران $t-j$ و $t+k-j'$ اى مـا لم تكـن $k-j' = -j$ أو $j' = j+k$. في هذه الحالة يكون لدينا $E(e_{t-j}^2)$ وهـو σ_e^2.

الآن إذا عوضنا (٥,١٥) في : (٥,١٤)

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k$$

لأنه ل $k < -j$ يكون $j+k < 0$ و $\psi_{j'} = 0$ إذا كانت $j' < 0$ مـن تعريف العملية (٥,١٢).

كـذلك إذا وضـعنا $j+k = j'$ بحيـث تكـون $k = j'-j$ فـإن (بمـا أن $k = -j$ تكافئ $j' = 0$):

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j'} B^{j'-j}$$

$$= \sigma_e^2 \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_{j'} B^{j'} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^{-j}$$

$$= \sigma_e^2 \psi(B)\psi(B^{-1})$$

$$= \sigma_e^2 \psi(B)\psi(F) \qquad \dots (٥,١٦)$$

حيث F مشغل الإزاحة للأمام ، لأن $B^{-1}Y_{t-1}$ $B^{-1}BY_t =$ يؤدي إلى
. $B^{-1}Y_{t-1} = Y_t$

نعلم أن طيف القوة بدلالة التغاير الذاتي يمكن كتابته بالشكل (الباب الثالث) :

$$p(f) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos 2\pi fk \qquad 0 \le f \le \frac{1}{2}$$

إذا عوضنا $B = e^{-i2\pi f}$ في (٥,١٤) نحصل على

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k (Cos\, i2\pi fk - i \sin 2\pi fk)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k Cos\, i2\pi fk$$

بما أن زاوية الجيب فردية. وهو نصف طيف القوة .لهذا وإذا استخدمنا الصيغة البديلة (٥,١٦) ووضعنا $B^{-1} = e^{i2\pi f}$ وضربنا في ٢ نحصل على طيف القوة للعملية الخطية (٥,١٢) :

...(٥,١٧)

$$p(f) = 2\sigma_e^2 \psi(e^{-i2\pi f})\psi(e^{i2\pi f}) \qquad 0 \le f \le \frac{1}{2}$$

٥,٥,٧ طيف القوة لعملية الانحدار الذاتي ذات الرتبة p

في العملية AR(p) نجد من (٥,١٣) أن

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B)$$