Solution Serie 3

Partie I) : Lois de probabilités (discrètes et continues)

Exercice 1 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	a	2a	3a	3a	2a	a

Avec $a \in \mathbb{R}$.

1) A quelle(s) condition(s) sur a ce tableau définit bien une loi de probabilité ?

On sait bien que $P(X = x_i) = P_X(x_i)$, et pour que P_X soit une loi de probabilité il faut qu'elle vérifie : $\begin{cases} P_X(x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{6} P_X(x_i) = 1 \end{cases}$

Commençons par la deuxième condition :

$$\sum_{i=1}^{6} P_X(x_i) = 1 \Rightarrow P_X(x_1) + P_X(x_2) + P_X(x_3) + P_X(x_4) + P_X(x_5) + P_X(x_6) = 1$$

$$\Rightarrow P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) + P_X(5) + P_X(6) = 1$$

$$\Rightarrow a + 2a + 3a + 3a + 2a + a = 1$$

$$\Rightarrow 12a = 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{1}{12} = 0,083}$$

2) Calculer $P(X \leq 3)$ et $P(X > 4)$

▪ $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$\Rightarrow P(X \leq 3) = a + 2a + 3a = 6a = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 3) = \frac{1}{2} = 0,5}$$

▪ $P(X > 4) = ?$

$$\Rightarrow P(X > 4) = 2a + a = 3a = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(X > 4) = \frac{1}{4} = 0,25}$$

Exercice 2 :

1) Donner la loi que suit X et sa formule.

On voit bien que : $X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3, \dots, 200\}$ (c'est une variable aléatoire discrète).

Donc X suit la loi **binomiale** de taille $n = 200$ et de paramètre $p = 0,05$, on écrit alors

$\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathrm{B}(200; 0,05)}$

$P_X(k) = c_{200}^{k}(0,05)^k(1 - 0,05)^{200-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 200\}$ (k représente le nombre de composants défectueux)

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(k) = c_{200}^{k}(0,05)^k(0,95)^{200-k}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 200\}$

2) Quelle est la probabilité qu'aucun objet ne soit défectueux ?

$P_X(0) = c_{200}^{0}(0,05)^0(0,95)^{200-0} = c_{200}^{0}(0,95)^{200}$

Avec $c_{200}^{0} = \frac{200!}{0!(200-0)!} = 1$

$\Rightarrow P_X(0) = (0,95)^{200}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(0) = 3,5 \times 10^{-5}}$

3) Quelle est la probabilité que deux objets soient défectueux ?

$P_X(2) = c_{200}^{2}(0,05)^2(0,95)^{200-2} = c_{200}^{2}(0,05)^2(0,95)^{198}$

Avec $c_{200}^{2} = \frac{200!}{2!(200-2)!} = \frac{200!}{2!\times 198!} = \frac{198!\times 199\times 200}{2!\times 198!} = \frac{198!\times 199\times 200}{198!\times 2} = 199 \times 100$

$\Rightarrow P_X(2) = 199 \times 100 \times (0,05)^2(0,95)^{198}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(2) = 1,93 \times 10^{-3}}$

Exercice 3 :

1) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive k personnes ?

La variable aléatoire X suit la loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$, avec : $P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ où

$\lambda = 1{,}25$ (k représente le nombre de personnes arrivant dans cet hôtel chaque 10mn dans cet horaire particulier).

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(k) = \frac{1{,}25^k}{k!}e^{-1{,}25}}$

2) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 2 personnes ?

$$P_X(2) = \frac{1{,}25^2}{2!}e^{-1{,}25} = 0{,}224$$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(2) = 0{,}224}$

3) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 4 personnes au plus ?

$P(X \leq 2) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) + P_X(4)$

- $P_X(0) = \frac{1{,}25^0}{0!}e^{-1{,}25} = 0{,}287$
- $P_X(1) = \frac{1{,}25^1}{1!}e^{-1{,}25} = 0{,}358$
- $P_X(3) = \frac{1{,}25^3}{3!}e^{-1{,}25} = 0{,}093$
- $P_X(4) = \frac{1{,}25^4}{4!}e^{-1{,}25} = 0{,}029$
- Donc : $P(X \leq 2) = 0{,}287 + 0{,}358 + 0{,}224 + 0{,}093 + 0{,}029$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 2) = 0{,}991}$

Exercice 4 :

Si X suit une loi N(35,5), calculer $P(X < 25)$, $P(37{,}5 < X < 40)$ et $P(32{,}5 < X < 37{,}5)$.

Pour répondre à cette question il faut appliquer le théorème suivant :

Théorème :

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ (c'est-à-dire $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$). Si on applique le changement de variable $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ on a :

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(U \le u) = F_U(u)$$

Et donc la variable aléatoire U suit la loi normale centrée réduite $N(\mu, \sigma)$.

Dans notre cas : $\mu = 35$ et $\sigma = 5$

♦ $P(X < 25) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = P\left(U < \frac{25-35}{5}\right) = P(U < -2) = F_U(-2) = 1 - F_U(2)$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

♦ $P(37{,}5 < X < 40) = P\left(\frac{37{,}5-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{37{,}5-35}{5} < U < \frac{40-35}{5}\right)$

$$= P(0{,}5 < U < 1) = F_U(1) - F_U(0{,}5) = 0{,}8413 - 0{,}6915 = 0{,}1498$$

♦ $P(32{,}5 < X < 37{,}5) == P\left(\frac{32{,}5-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{37{,}5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{32{,}5-35}{5} < U < \frac{37{,}5-35}{5}\right)$

$$= P(-0{,}5 < U < 0{,}5) = F_U(0{,}5) - F_U(-0{,}5) = F_U(0{,}5) - \left(1 - F_U(0{,}5)\right)$$
$$= \left(2 \times F_U(0{,}5)\right) - 1 = (2 \times 0{,}6915) - 1 = 0{,}383$$

Partie II) : Statiqtiques déscriptives

Exercice 1 :

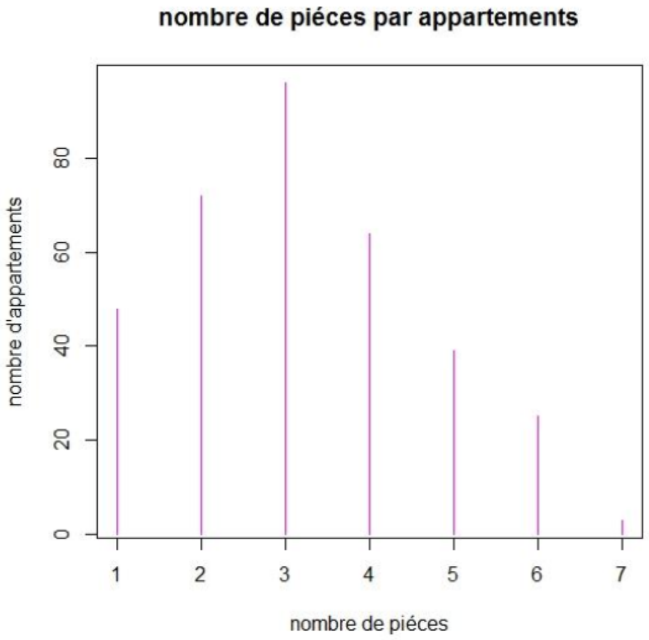
1)

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
n_i	48	72	96	64	39	25	3
N_i	48	120	216	280	319	344	347
f_i	0,138	0,207	0,277	0,184	0,112	0,072	0,009
F_i	0,138	0,345	0,622	0,806	0,918	0,99	0,999

2) Il y a 64 appartements qui ont 4 pièces. ($n_4 = 64$)

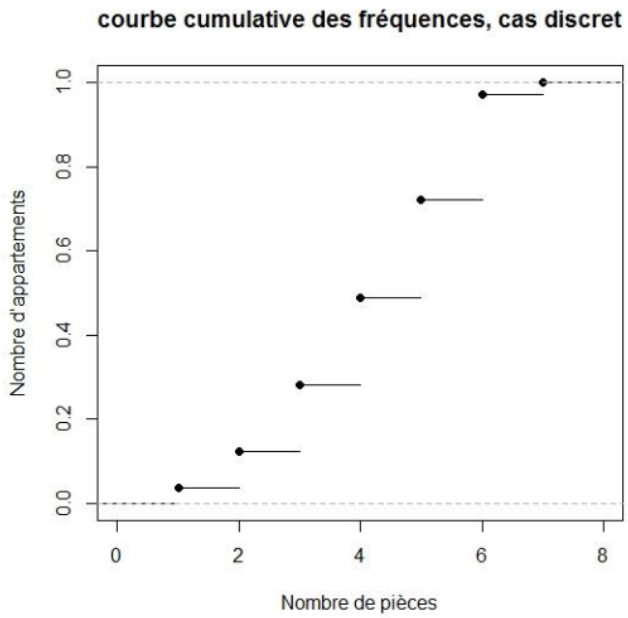
3) Il y a 216 appartements qui ont au plus 3 pièces. ($N_3 = 216$)

4) Le diagramme en bâtons des effectifs :



5) Puisque la plus grande valeur des effectifs est $n_3 = 96$ donc le mode est $x_3 = 3$.

6) La courbe cumulative des fréquences cumulées :



7) En utilisant la relation vérifiée par la médiane : $F(M_e) = \frac{1}{2}$ et la méthode de la projection on obtient la médiane $M_e = x_3 = 3$

8) $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 3{,}176$

Avec $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_7 = 347$

$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - \bar{X}^2 = 2{,}149$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 1{,}466$

Exercice 2 :

1)

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	5	8	6	3	6	2	1	3	1

2) a)

$f_9 = \frac{1}{35} = 0{,}028$ donc le pourcentage est 2,8%

b)

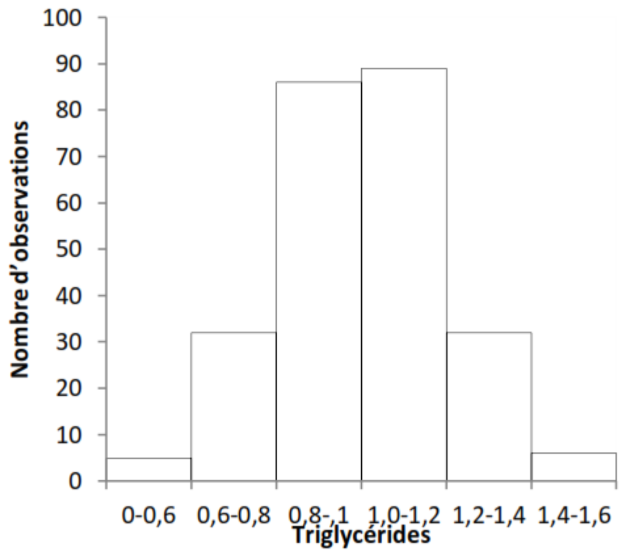
$F_5 = \frac{N_5}{N} = \frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}{35} = \frac{5+8+6+3+6}{35} = 0{,}8$ donc le pourcentage est 80%

Exercice 3 :

1)

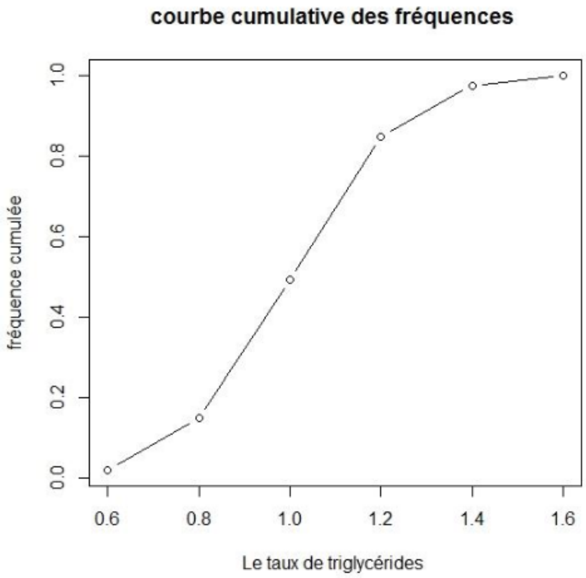
$\mathcal{E}_i$	$[0; 0{,}6[$	$[0{,}6; 0{,}8[$	$[0{,}8; 1{,}0[$	$[1{,}0; 1{,}2[$	$[1{,}2; 1{,}4[$	$[1{,}4; 1{,}6[$
n_i	5	32	86	89	32	6
N_i	5	37	123	212	244	250
f_i	0,02	0,128	0,344	0,356	0,128	0,024
F_i	0,02	0,148	0,492	0,848	0,976	1

2) L'histogramme des effectifs :



3) Puisque la plus grande valeur des effectifs est $n_4 = 89$ alors la classe modale est $\mathcal{E}_4 = [1{,}0; 1{,}2[$ est par suite le mode est le centre de cette classe, c'est-à-dire $c_4 = 1{,}1$

4) la courbe cumulative des fréquences cumulées :



5) En utilisant la relation vérifiée par la médiane : $F(M_e) = \frac{1}{2}$ et la méthode de la projection on obtient la médiane : $tg(\alpha) = \frac{0{,}848-0{,}492}{1{,}2-1} = \frac{0{,}5-0{,}492}{Me-1}$ est par suite $Me = 1{,}004$

6) $\bar{X} = \sum_{i=1}^{6} f_i c_i = 0{,}9992$

$V(X) = \sum_{i=1}^{6} f_i c_i^2 - \bar{X}^2 = 0{,}0458$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 0{,}214$