Travaux dirigés du chapitre 1

Exercice 01 : Modélisation de problèmes de programmation linéaire

Une unité de production de parpaings fabrique quatre types de produit :
 Les parpaings de dimensions respectivement **10 cm** (noté **P1**), **15 cm** (noté **P2**), **20 cm** (noté **P3**) et **l'ourdi** (noté **P4**).

Pour la fabrication de ces produits, on utilise quatre matières premières, le sable (**M1**), le gravier (**M2**), le ciment (**M3**) et l'eau (**M4**), disponibles en quantité respectivement de **5000**, **3000** et **2000** unités. L'eau est disponible en quantité illimitée.

Le plan de production de l'unité est donné dans le tableau ci-dessous :

Produits Matières premières	P1	P2	P3	P4	Quantités matières premières disponibles
M1	2	3	5	6	5000
M2	1	2	3	3	3000
M3	0,8	1	2	3	2000
M4	1	1	2	2	/

Le tableau signifie que pour fabriquer un parpaing de **10 cm**, il faut **2** unités de **M1**, **1** unité de **M2**, **0,8** unité de **M3** et **1** unité de **M4**, et de la même manière pour **P1**, **P2**, **P3** et **P4**.
 Les parpaings sont vendus respectivement à raison de **6**, **7**, **9** et **10** DA à l'unité.

Le problème pour la direction de l'unité est de trouver le nombre maximal de **P1**, **P2**, **P3** et **P4** à fabriquer pour avoir un bénéfice maximal, tout en respectant les contraintes de l'unité.

Exercice 02 :

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trouvez la solution graphique de ce modèle

Travaux dirigés du chapitre 2

Exercice 01 :

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes ? Lesquelles sont concaves ? Justifier votre réponse.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1 - x^2$
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2 - 1$
- c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^3$

RAPPEL :

- Une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout couple de points (x_1, x_2) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$.
- Une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est concave si et seulement si pour tout couple de points (x_1, x_2) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \leq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$.
- Une fonction affine, encore appelée linéaire, est à la fois convexe et concave.

Exercice 02 :

Soient les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & & g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 & & (x_1, x_2) \rightarrow g(x_1, x_2) = 1/3 x_1^3 + x_2^3 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

- a) Calculer le gradient des fonctions f et g pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
- b) Calculer la matrice Hessienne des fonctions f et g pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Etudier les valeurs pour lesquelles cette matrice est définie positive. Que peut-on en déduire ?