جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي **السنة الجامعية : 2023/ 2024**

المستوى : أولى رياضيات و إعلام آلي **امتحان في مادة التحليل 1** **المدة: ساعة و نصف**

التمرين الأول (6 نقاط):

1) ليكن b, a عددين ناطقين موجبين تماما حيث $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}^+$. بين أن $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$.

2) لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى، نعرف المجموعة $-A = \{-x; x \in A\}$.

أثبت أن $\inf(-A) = -\sup A$.

3) أثبت أن $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan x + \operatorname{arc\,cotan} x = \frac{\pi}{2}$.

4) أكتب العبارة $L(x) = \sin^3 x \cos^3 x$ على الشكل الخطي. (لاحظ أن $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$).

التمرين الثاني (7 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $I = [2, +\infty[$ بـ $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$.

1) أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب) باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن: $\forall a, b \in I : |f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b-a|$.

2) لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين كما يلي $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

أ) أدرس رتابة المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ب) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}: |v_{n+1} - u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n - u_n|$.

ج) أثبت بالتراجع أن $\forall n \in \mathbb{N}: |v_n - u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.

4) نضع $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}: |\ell - u_n| \leq |v_n - u_n|$.

ب) استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد ℓ.

التمرين الثالث (7 نقاط):

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \,, x > 0 \\ e^{x^2} - \cos x \,, x \leq 0 \end{cases}$.

1) أدرس استمرار g على $\mathbb{R}$.

2) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}$.

3) أدرس قابلية اشتقاق g على $\mathbb{R}$.

4) أكتب عبارة $g'(x)$ بدلالة x.

5) هل g من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$؟ برر إجابتك.

6) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} [g(x) - x]$ ، ماذا تستنتج؟

بالتوفيق.

Larbi Ben Mhidi University - Oum El Bouaghi-

Faculty of exact sciences, natural and life sciences

Department of Mathematics and Computer Science **Academic year: 2023/2024**

Level: 1st year MI **Duration:1h30**

Exam: Analysis 1

Exercise 1 (6 pts)

1) Let a and b be two numbers where $a \in \mathbb{Q}^+$, $b \in \mathbb{Q}^+$and $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}^+$. Prove that $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$.

2) Let A be a subset of $\mathbb{R}$ bounded from above, we define the set $-A = \{-x; x \in A\}$.
Prove that: $\inf(-A) = -\sup A$.

3) Prove that: $\forall x \in \mathbb{R} : \text{arc}\tan x + \text{arc cotan}\, x = \frac{\pi}{2}$.

4) Write the expression $L(x) = \sin^3 x \cos^3 x$ in linear form (Note that: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$).

Exercise 2 (7 pts)

Let f be a function defined in the interval $I = [2, +\infty[$ by $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$.

1) a) Prove that the function f is strictly increasing on I.

b) Using the mean value theorem Prove that: $\forall a, b \in I: |f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b - a|$.

2) Let $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequences defined by: $\forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

a) Study the monotonicity of the two sequences $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Prove that: $\forall n \in \mathbb{N}: |v_{n+1} - u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n - u_n|$.

c) Using the proof by induction, prove that: $\forall n \in \mathbb{N}: |v_n - u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3) Prove that $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are adjacent.

4) We put $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

a) Prove that $\forall n \in \mathbb{N}: |\ell - u_n| \leq |v_n - u_n|$. b) Deduce a value rounded to 10^{-2} for ℓ.

Exercise 3 (7 pts) Let f be a function defined in $\mathbb{R}$ by $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x > 0 \\ e^{x^2} - \cos x, x \leq 0 \end{cases}$.

1) Examine the continuity of g over $\mathbb{R}$. 2) Using L'Hopital's rule, calculate $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}$.

3) Examine the derivability of g over $\mathbb{R}$. 4) Express $g'(x)$ in terms of x.

5) Is the function g of class C^1 on $\mathbb{R}$? justify your answer.

6) Using L'Hopital's rule, calculate $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - x]$, What do you conclude?

Good luck.

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي **السنة الجامعية : 2023/ 2024**

المستوى : أولى رياضيات و إعلام آلي **الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط لامتحان مادة التحليل 1**

<u>التمرين الأول (6 نقاط)</u>:

1) نفرض أن $\sqrt{a}+\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}^+$ و منه

(1) $$\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow 2\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+.$$

و هذا يناقض الفرضية.

2) بما أن A محدودة من الأعلى فهي تقبل حدا أعلى نرمز له بـ M لدينا

(0.5) $$\sup A=M\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A: x\le M\\ \forall\varepsilon>0,\exists a\in A: M-\varepsilon<a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A: -x\ge -M\\ \forall\varepsilon>0,\exists a\in A: -M+\varepsilon>-a\end{cases}$$

(0.5+0.5) $$\begin{cases}\forall -x\in -A: -x\ge -M\\ \forall\varepsilon>0,\exists -a\in -A: -M+\varepsilon>-a\end{cases}\Leftrightarrow\inf(-A)=-M\Leftrightarrow\inf(-A)=-\sup A$$

(0.5) 3) نضع $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=\operatorname{arc\,tan}x+\operatorname{arc\,cotan}x$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}=0$ و منه

(0.5+0.5) $$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=f(0)=\operatorname{arc\,tan}0+\operatorname{arc\,cotan}0=\frac{\pi}{2}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}: \operatorname{arc\,tan}x+\operatorname{arc\,cotan}x=\frac{\pi}{2}$.

4) بوضع $z=\cos 2x+i\sin 2x$ فإن $\frac{1}{z}=\cos 2x-i\sin 2x$ ومنه

(0.5) $\sin 2x=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ و $\forall k\in\mathbb{Z}: \sin k2x=\frac{1}{2i}\left(z^k-\frac{1}{z^k}\right)$ و منه

(0.5) $$L(x)=\sin^3x\cos^3x=(\sin x\cos x)^3=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^3=\frac{1}{8}\sin^3 2x=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^3$$

(0.5+0.5) $$=-\frac{1}{64i}\left[\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+3\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=-\frac{1}{64i}\left[(2i\sin 6x)-3(2i\sin 2x)\right]$$

إذن $L(x)=\frac{3}{32}\sin 2x-\frac{1}{32}\sin 6x$.

<u>التمرين الثاني (7 نقاط)</u>:

$f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+2$.

(0.5) 1) أ) $\forall x\in I: f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب) الدالة f مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال I بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[a,b]$ (أو $[b,a]$)

نحصل على $|f(b)-f(a)| \le f'(c)|b-a|$ حيث $a<c<b$ أو $b<c<a$ و بما أن $a,b \in I$ فإن $c>2$. (0.5)

لدينا

$$c>2 \Rightarrow c^2>4 \Rightarrow \frac{1}{c}+\frac{1}{c^2} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow f'(c)<\frac{3}{4}$$ (0.5)

ومنه $\forall a,b \in I: |f(b)-f(a)| \le \frac{3}{4}|b-a|$ (0.5)

2)

(0.5)

أ) لدينا $2=u_0<u_1=2.1931$ و f متزايدة تماما ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

(0.5)

$3=v_0>v_1=2.7653$ و f متزايدة تماما ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما.

ب) بوضع $a=u_n$ و $b=v_n$ في العلاقة السابقة نحصل على $|f(v_n)-f(u_n)| \le \frac{3}{4}|v_n-u_n|$ ومنه

$\forall n \in \mathbb{N}: |v_{n+1}-u_{n+1}| \le \frac{3}{4}|v_n-u_n|$. (0.5)

ج) $1 \le 1 \Leftrightarrow |v_0-u_0| \le \left(\frac{3}{4}\right)^0$ (محققة)

(1)

نفرض $\forall n \in \mathbb{N}: |v_n-u_n| \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}: |v_{n+1}-u_{n+1}| \le \frac{3}{4}|v_n-u_n| \le \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

(0.5)

3) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le |v_n-u_n| \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$. و $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ومنه $\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.

4).أ) بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين فإن $\ell=\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}(v_n)$ أي أن

(0.5)

$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \le \ell \le v_n$

و منه $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le \ell-u_n \le v_n-u_n$ أي أن $\forall n \in \mathbb{N}: |\ell-u_n| \le |v_n-u_n|$. (0.5)

ب) بحساب القيم المتتابعة لـ $|v_n-u_n|$ نحصل على $|v_8-u_8|=0.009\,5312<0.01$ إذن يمكن اعتبار u_8 قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد ℓ حيث $u_8=2.5301$. (0.5) (0.5)

التمرين الثالث (7 نقاط):

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ e^{x^2}-\cos x, & x\le 0\end{cases}$.

(0.25)

1) g مستمر في كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا

(0.5)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x^2}-\cos x\right)=0=g(0)$. إذن g مستمرة عند 0 من اليسار.

لدينا أيضا $\forall x>0: 0 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2$ و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=0=g(0)$. إذن g مستمرة عند 0 من اليمين. (0.5)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-\cos x\right)'}{(x)'}=\frac{2xe^{x^2}-\sin x}{1}=0$ (2. (1)

(0.25)

3) g تقبل الاشتقاق في كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}\right)=0$. (0.5)

لدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$. و منه فإن $\forall x>0: 0\le x\sin\frac{1}{x}\le x$

أي أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$ $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$. (0.5)

إذن g تقبل الاشتقاق عند 0 حيث $g'(0)=0$.

4) عبارة $g'(x)$ بدلالة x.

$g'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & ,x>0\\ 0 & ,x=0\\ 2xe^{x^2}+\sin x & ,x<0\end{cases}$ أو اختصارا $g'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & ,x>0\\ 2xe^{x^2}+\sin x & ,x\le 0\end{cases}$. (1)

5) g ليست من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$ لأن g' ليست مستمرة عند 0 من اليمين وذلك لأن (0.5)

المتتاليتين (x_n) و (x'_n) حيث $x'_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{3}}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: x_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ متقاربتين نحو 0.

لكن $\lim\limits_{n\to\infty}g'(x'_n)=-\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}g'(x_n)=0$ أي أن g' لا تقبل نهاية عند 0 من اليمين. (0.5)

6) ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\sin\frac{1}{x}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{0}{0}$

ح ع ت $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-\cos\frac{1}{x}+1}{-\frac{2}{x}}\right]=\frac{0}{0}$ (0.5)

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(-\cos\frac{1}{x}+1\right)'}{\left(-\frac{2}{x}\right)'}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{x}}{2}\right]=0$ (0.5)

نستنتج أن بيان الدالة g يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته. (0.5)

Ex1 (6 pts)

(1) Assume that $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}^+$, so $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \in \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow$ Contradiction with the assumption $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}^+$

1

therefore $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$

(2) Since A is bounded from above, then $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t $M=\sup(A)$

that is, $\begin{cases} \forall x \in A : x \leq M \\ \forall \varepsilon>0, \exists a \in A : M-\varepsilon < a \end{cases}$ 0,5

Thus: $\begin{cases} \forall x \in A : -x \geq -M \\ \forall \varepsilon>0, \exists a \in A : -M+\varepsilon > -a \end{cases}$ 0,5

hence $\operatorname{Inf}(-A) = -M = -\sup(A)$ 0,5

(3) Set $f(x) = \arctan(x) + \operatorname{arccotan}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$ 0,5

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = cte = f(0)$ 0,5

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \arctan(x) + \operatorname{arccotan}(x) = \arctan(0) + \operatorname{arccotan}(0)$

$= \frac{\pi}{2}$ 0,5

(4) Put $z = e^{2xi} = \cos(2x) + i\sin(2x) \Rightarrow \frac{1}{z} = \cos(2x) - i\sin(2x)$. ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

0,5 $\Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, also we can easily get: $\sin(2kx) = \frac{1}{2i}\left(z^k - \frac{1}{z^k}\right)$

Now, $L(x) = \sin^3(x)\cos^3(x) = (\sin(x)\cos(x))^3 = \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^3 = \frac{1}{8}\sin^3(2x)$

0,5 $= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^3 = \frac{-1}{64i}\left[\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) - 3\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$

0,5 $= \frac{-1}{64i}\left[2i\sin(6x) - 6i\sin(2x)\right]$

0,5 $= \frac{-1}{32}\sin(6x) + \frac{3}{32}\sin(2x)$.

Exo 2 (7 pts.) $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + 2$.

(1) (a) $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow$ (str.) 0,5

(b) Using the M.V.T for f in the interval $[a,b]$ / $a,b \in I$, we get: $\exists c \in]a,b[$ s.t. $|f(b)-f(a)| \leq f'(c)\,|b-a|$ 0,5 ... (1)

Since $c \in]a,b[\subset I = [2,+\infty[$, we find: $c > 2$, so $c^2 > 4$

thus, $\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 0,5 $\Rightarrow f'(c) < \frac{3}{4} \Rightarrow |f(b)-f(a)| < \frac{3}{4}|b-a|$ for any $a,b \in I$. 0,5

(2) $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} v_{n+1} = f(v_n) \\ v_0 = 3 \end{cases}$

(a) Since $f \nearrow$ (str.) and $u_0 = 2 < u_1 \approx 2{,}19 \Rightarrow (u_n) \nearrow$ (str.) 0,5

also $f \nearrow$ (str.) and $v_0 = 3 > v_1 \approx 2{,}77 \Rightarrow (v_n) \searrow$ (str.) 0,5

(b) Substituting $a = u_n$ and $b = v_n$ in the inequality (1), we get:

0,5 $|f(v_n) - f(u_n)| \leq \frac{3}{4}|v_n - u_n| \Rightarrow |v_{n+1} - u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n - u_n|$; for any $n \in \mathbb{N}$

(c) For $n = 0$, we have: $|v_0 - u_0| = |3-2| = 1 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$

Now, assume that: $|v_n - u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ for $n \in \mathbb{N}$, we have: 1

$|v_{n+1} - u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n - u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ as required.

(3) Since $|v_n - u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ and $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, by squeez thm. we get:

0,5 $\lim(v_n - u_n) = 0$. Because $(u_n) \nearrow$, $(v_n) \searrow$ and $\lim(v_n - u_n) = 0$, we conclude that (u_n) and (v_n) are adjacent.

(4) Since (u_n) and (v_n) are adjacent, we deduce that $\lim(v_n) = \lim(u_n) = \ell$ (say)

0,5 Thus $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \ell \leq v_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: 0,5 $|\ell - u_n| \leq |v_n - u_n|$

(5) By calculating the successive values of $|v_n - u_n|$, we get $|v_8 - u_8| < 0{,}01$

so, u_8 can be considered a rounded value to 10^{-2} for ℓ, 0,5 thus $\ell \approx u_8 \approx 2{,}53$ 0,5

Ex3 (7pts) $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} \ , & x>0 \\ e^{x^2}-\cos x \ , & x\leq 0 \end{cases}$

① g is continuous over $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ (0,25)

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{x^2}-\cos(x)\right) = g(0) = 0$ .. ① (0,5)

since, for $x>0$; $0\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$, by squeez thm, we get:

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\sin\frac{1}{x} = 0 = g(0)$ -- ② (0,5)

from ① and ②, we find that $g(x)$ is continous at $x=0$

② $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x} = IF\frac{0}{0}$, using L'Hopital we get: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-\cos x)'}{(x)'}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{1} = 0$ (1)

(0,25)

③ g is diff~~ble~~ over $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. We have $g'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$\Rightarrow g'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}\right) = 0$ (from qt, 2) --- ③ (0,5)

since, for $x>0$; $0\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$; by squeez thm, we get:

$g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ -- ④ (0,5)

from ③ and ④, we get: $g'(0)=0$.

④ $g'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \ ; & x>0 \\ 0 \ ; & x=0 \\ 2xe^{x^2}+\sin x \ ; & x<0 \end{cases}$ (1)

⑤ Since, for $x_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ and $x'_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{3}}$, we have $\lim x_n=\lim x'_n=0$

and $\lim g'(x_n)=\lim\left[\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\right]=0$

(0,5) $\lim g'(x'_n)=\lim\left[\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{3}}\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\frac{1}{2}$

$\neq$ $\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} g'(x)$ (0,5) $\Rightarrow g\notin C^1(\mathbb{R})$

⑥ $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = IF\frac{0}{0}$, using L'Hopital, we get:

$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\cos\frac{1}{x}+1\right)}{\left(-\frac{2}{x}\right)} = IF\frac{0}{0}$, using L'Hop-

once more, we get: $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2} = 0$ (0,5)

$\Rightarrow$ so g accepts an asymptotic line in the neighborhood of $+\infty$ with eqn. ($y=x$) (0,5)