امتحان محلول 3

<u>التمرين الأول</u>:(4 نقطة) أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل.

1) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left\{1-\frac{1}{n}\right\}=1$.

2) المعادلة $x^2+x-1=0$ تقبل على الأقل حلا ناطقا.

3) إذا كانت المتتاليتين (u_{2n}) و (u_{2n+1})متجاورتان فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

4) إذا كان f تابع مستمر على المجال $[a,b]$، فإنَه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ يحقق:

$\forall x\in[a,b]:\ f(x)\le f(c)$.

<u>التمرين الثاني</u>:(10 نقاط)

لتكن المتتاليتين$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$و$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين كما يلي:

$$\begin{cases} v_0=b \\ \forall\, n\in\mathbb{N}:\ \ v_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0=a \\ \forall\, n\in\mathbb{N}:\ \ u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\end{cases}$$ حيث $0<a<b$.

1) أثبت ما يلي:

أ) $\forall\, n\in\mathbb{N}: 0< \quad {}_n<v_n$ ب) المتتاليتين$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$و$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتين.

جـ) $\forall\, n\in\mathbb{N}: v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$. د) $\forall\, n\in\mathbb{N}: v_n-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)$.

هـ) ماذا تستنتج؟

2) نضع $a=1$ و $b=4$.

أ) أحسب $u_1,\quad {}_1,\ u_2,\ v_2$. ب) عين أصغر عدد طبيعي n حيث $v_n-u_n\le\frac{1}{100}$.

<u>التمرين الثالث</u>:(6 نقاط)

ليكن التابع f المعرف بـ $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{3} & ,\ x>0\\ 0 & ,\ x=0\\ \frac{\sin x-x}{x^2} & ,\ x<0\end{cases}$

1) حدد مجموعة تعريفالتابع f.

2) باستعمال قاعدة لوبيتال احسب النهايتين$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$.

3) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0، هل f مستمر عند 0(علل).

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط

<u>التمرين الأول(4 نقاط)</u>: 1)صحيح .... **التعليل:** المتتالية $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ حيث$\forall n\in\mathbb{N}^*:\ u_n=1-\frac{1}{n}$ ، متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي	0.5

0.5	متقاربة نحو $\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ و منه فإن $\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\{1-\frac{1}{n}\right\}=\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.
	أي أنَ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، لكنها متباعدة لأنَ المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتينهما 1 و -1 على الترتيب.
0.5	2) **خطأ** ....
	التعليل: نفرض أن المعادلة تقبل حلا ناطقا أي من الشكل $x=\frac{p}{q}$ حيث $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{N}^*$ والعددان q و p أوليان فيما بينهما، بالتعويض في المعادلة نحصل على
0.5	$\left(\frac{p}{q}\right)^2+\frac{p}{q}-1=0\Leftrightarrow q(q-p)=p^2$ و منه فإن $q\setminus p^2$ أي أن $q=1$ بالتعويض في المعادلة نحصل على $p^2+p-1=0$ أو $p(1+p)=1$ و هذا تناقض لأن العدد $p(1+p)$ زوجي.
0.5	3) **صحيح** ....
0.5	**التعليل:** بما أن المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين فهما متقاربتين نحو نهاية مشتركة ℓ أي أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ونهايتها ℓ.
0.5	4) **صحيح** ....
0.5	لأنَ كل تابع f مستمر على مجال مغلق $[,b]$ يدرك حده الأعلى على مرة على الأقل على المجال $[a,b]$ أي أنه $\exists\, c\in[a,b];\ \forall x\in[a,b]:\ f(x)\le f(c)$.
	التمرين الثاني(10 نقاط):
	1) أ) لدينا $u_0>0$ و$v_0>0$.
0.5	نفرض $u_n>0$ و $v_n>0$.
	$v_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)>0$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}>0$.
	لدينا أيضا $a<b\Rightarrow u_0<v_0$.
0.5	نفرض $u_n<v_n$ و لنبرهن أن $u_{n+1}<v_{n+1}$.
	$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)-\sqrt{u_nv_n}=\frac{1}{2}(u_n-v_n)^2>0$.
1	ب) $_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n\quad _n}-u_n=\sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}\right)>0\Leftarrow(u_n)$ متزايدة تماما.
1	$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}(u_n+v_n)-v_n=\frac{1}{2}(u_n-v_n)<0\Leftarrow(u_n)$ متناقصة تماما.
	جـ) $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)-\sqrt{u_nv_n}=\frac{1}{2}(v_n-u_n)+u_n-\sqrt{u_nv_n}$
1.5	$=\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)+\sqrt{u_n}\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)$
	$\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$ (لأن $\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}<0$)
	د) لدينا $v_0-u_0=b-a\le b-a$
1	نفرض $_n-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-)$ ونبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)$.
	$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)\le\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)$.
1	هـ) بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-)\right)=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ، نستنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.
4(0.5)	2) أ) $u_1=2$, $v_1=\frac{5}{2}$, $u_2=\sqrt{5}$, $v_2=\frac{9}{4}$.
1	ب) حتى يكون $_n-u_n\le\frac{1}{100}$ يكفي أخذ $\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-1)<\frac{1}{100}$ و منه $n>\frac{\ln 300}{\ln 2}=8.22$
1	أصغر قيم n هي 9.
	التمرين الثالث (6 نقاط):
1	1) $D_f=\mathbb{R}$.
1	2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+\sin x}{2}=-\frac{1}{2}$.

1	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$.
1	3) $f'(0-0)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\frac{\frac{\sin x-x}{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$.
1	$\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\frac{\frac{\ln(x+1)-\sin x}{3x}-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}$ $=f'(0+0)$
	إذن $'(0-0)=f'(0+0)=-\frac{1}{6}$ و منه f يقبل الاشتقاق عند 0.