امتحان محلول 2

<u>التمرين الأول</u>:(12 نقطة)

1) ليكن f تابع معرف على المجال $I = \left]\frac{1}{2}; 2\right]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$.

أ) (1+ 1.5 نقطة) ادرس اتجاه تغير التابع f ثم استنتج أنَ: $\forall x \in I : \ f(x) \in I$.

ب)(1 نقطة) بينأنَ: $\forall x \in I : \ f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x}{x+2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

جـ)(1.5 نقطة) استنتج أنَ: $\forall x \in I : \ f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

2)لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث: $u_0 = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) (1 نقطة) أحسب $_1$ ، u_2. ب)(1 نقطة) أثبت أنَ: $\forall \ n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{2} < u_n \leq 2$.

ج)(1 نقطة) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n). د)(1+ 1 نقطة) بين أنَ (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها l.

3) أ) (0.5 نقطة) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 < u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \frac{1}{2})$.

ب) (1 +0.5 نقطة) استنتج أنَ: $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 < u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n$ ، ثم عين أصغر عدد طبيعي n حيث: $u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1000}$.

<u>التمرين الثاني</u>:(8 نقاط) (الأسئلة 1و 2 و3 مستقلة).

1) (1.5 نقطة) باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أنَ: $\forall x > 0 : \ln(x+1) < x$.

2) ليكن التابع f حيث $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - \sin x}{x\ln(x+1)}, & x \neq 0 \\ 2 & , \ x = 0 \end{cases}$.

أ)(1 نقطة) عيَن مجموعة تعريف .

ب) (2 +0.5 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xe^x - \sin x}{x\ln(x+1)}$ ، هل f مستمرعند 0؟

3) ليكن التابع g المعرف على $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x^2 \ln\frac{x+1}{x}$ وليكن (C_g) تمثيله البياني.

أ)(2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال بين أنَ: $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$.

ب)(1 نقطة) استنتج أن (C_g) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار ∞ يطلب تعيين معادلة له.

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط

<u>التمرين الأول</u>:	
1) أ) $f'(x) = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$	0.5
$x^2 + 4x - 1 = 0 \ , \ \Delta = 20 \ , \ x_1 = -\sqrt{5} - 2 \ , \ x_2 = \sqrt{5} - 2$ و منه	0.5
$\forall x \in I : f'(x) > 0$أي أن f متزايد تماما على المجال I.	0.5
لدينا $x \in I \iff \frac{1}{2} < x \leq 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) \leq f(2) \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{5}{4} \leq 2$	
$\Rightarrow f(x) \in I$	0.5

1	ب) $f(x)-\frac{1}{2}=\frac{x^2+1}{x+2}-\frac{1}{2}=\frac{x^2-\frac{1}{2}x}{x+2}=\frac{x}{x+2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$.
	جـ) لدينا $\frac{x}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}$ و منه
1	$$\frac{1}{2}<x\le 2\Rightarrow 1-\frac{2}{\frac{1}{2}+2}<1-\frac{2}{x+2}\le 1-\frac{2}{2+2}\Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{x}{x+2}\le\frac{1}{2}$$
2(0.5)	2) أ) $u_1=\frac{5}{4}$ ، $u_2=\frac{41}{52}$
0.5	ب) $\frac{1}{2}<u_0\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}<2\le 2$
0.5	$$\frac{1}{2}<u_n\le 2\xRightarrow{\text{لسؤالمن 1) أ)}}\frac{1}{2}<f(u_n)\le 2\Rightarrow\frac{1}{2}<u_{n+1}\le 2$$
1	جـ) بما أن f متزايد تماما و $u_1<u_0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
1	د) بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأدنى فهي متقاربة.
1	نفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ell$ ، ℓ هي حل للمعادلة $f(x)=x$.
	$f(x)=x\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x+2}=x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.
0.5	3) أ) من السؤال 1) جـ) لدينا
0.5	$u_{n+1}-\frac{1}{2}=f(u_n)-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$.
0.5	ب) $0<u_0-\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0\Leftrightarrow 0<\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}$ نفرض أن $0<u_n-\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
0.5	$0<u_{n+1}-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
	حتى يكون $u_n-\frac{1}{2}\le\frac{1}{1000}$ يكفي اختيار $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1000}$ و منه
	$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1000}\Leftrightarrow n>\frac{\ln\frac{3}{2}+\ln 1000}{ln2}\cong 10.55$.
	أصغر قيمة لـ n هي 11.
0.5	**التمرين الثاني(8 نقاط):**
0.5	1) بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على التابع $f(x)=\ln(x+1)$ و المجال $[0,x]$ حيث $x>0$.
	$0<c<x$ $\quad f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$ و منه
2(0.5)	$$\ln(x+1)=\frac{1}{c+1}x\qquad 0<c<x$$
1	لدينا من جهة أخرى $c>0\Rightarrow\frac{1}{c+1}<1\Rightarrow\frac{1}{c+1}x<x$ و منه $\ln(x+1)<x$.
1+1	2) أ) $D_f=]-1,+\infty[$.
0.5	ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{x\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)e^x-\cos x}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)e^x+\sin x}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}=1$.
4(0.5)	بما أن $\lim\limits_{x\to 0}(x)\ne f(0)$ فإن f غير مستمر عند 0.
0.5	3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}$.
0.5	ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=0$.
	و منه فإن المستقيم ذو المعادلة $y=x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى البياني (C_g) بجوار $+\infty$.