امتحان محلول 1

التمرينالأول: أجب بـ صحيح أو خطأ مع التعليل.

1) (0.75+0.5)كل متتالية محدودة هي متتالية متقاربة.

2) (0.75+0.5) إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة على $\mathbb{N}$ و متقاربة نحو العدد ℓمن $\mathbb{R}$فإن $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \ell$.

3)(0.75+0.5)إذا كان $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell > 0\right)$ فإن:

$(\exists \delta > 0; \forall x \in]a-\delta, a[\cup]a, a+\delta[: f(x) > 0)$.

4)(0.75+0.5)إذا كان التابع f مستمر عند 0 فإن التابع $g: x \longrightarrow xf(x)$ يقبل الاشتقاق عند 0.

التمرين الثاني:(الهدف في هذا التمرين هو إثبات تباعد متتالية تراجعية، باستخدام متتاليتين جزئيتين).

1) ليكنfالتابع المعرف على المجال$I = [0;1]$ كما يلي : $f(x) = 1 - x^2$.

نعرف المتتالية التراجعية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث$u_0 = \frac{1}{2}$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

أ -(1 نقطة)أدرس اتجاه تغير التابع fعلى Iثم استنتج أنَ: $\forall x \in I : 0 \le f(x) \le 1$.

ب -(1.5 نقطة) بين أنَ $f \circ f(x) = -x^4 + 2x^2$، ثم حل في المجال I المعادلة: $x = f \circ f(x)$، إذا علمت أن 1 حل لها.

جـ - (2 نقطة) أحسب u_1، u_2، u_3، ثم بين أنَ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

2)لتكن المتتاليتين$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$،$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$حيث: $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{2n}$ و $\forall n \in\mathbb{N}^* : w_n = u_{2n-1}$.

أ - (1نقطة) بين أنَ $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ و $\forall n \in\mathbb{N}^* : w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

بـ (1 نقطة) بين أنَ المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$،$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبتين و متقاربتين.

جـ - (1.5 نقطة) أحسب نهايتي $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$، ماذا تستنتج؟

التمرين الثالث : ليكن التابع fالمعرف بـ $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{x^2+1}}, & x \ge 0 \\ \frac{3(x - \arctan x)}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$.

1) (0.5 نقطة) عين مجموعة تعريف التابع f.

2) أ - (2نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x - \arctan x}{x^3}$.

ب - (1.5 نقطة) استنتج أنَ f يقبل الاشتقاق عند 0.

3) أ - (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x\right)$.

ب- (1 نقطة) استنتج أن المنحنى البياني(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$يطلب تعيين معادلة له.

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط

التمرين الأول(5 نقاط):	
1) **خطأ**..	0.5
التعليل: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=(-1)^n$، لدينا $\forall n\in\mathbb{N}: -1\le u_n\le 1$	0.25
أي أنَ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، لكنها متباعدة لأنَ المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين	
نحو نهايتين مختلفتينهما 1 و -1 على الترتيب.	0.5
2) **صحيح**..	0.5
التعليل: بما أنَ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ فإن	
$\forall\varepsilon>0;\exists N\in\mathbb{N};\forall n\in\mathbb{N}: n>N\Longrightarrow \ell-\varepsilon<u_n<\ell+\varepsilon$ ....(1)	
لنبرهن بالخلف أنَ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\ge\ell$	
نفرض أن $\exists n_0\in\mathbb{N}: u_{n_0}<\ell$ و منه $\ell-u_{n_0}>0$، بوضع $\varepsilon=\ell-u_{n_0}$ في (1) نحصل على	
$\exists n_1\in\mathbb{N};\forall n\in\mathbb{N}: n>n_1\Longrightarrow u_{n_0}<u_n$.	
و بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة فإن $n>n_0\Longrightarrow u_n\le u_{n_0}$.	0.5
من أجل $n_2=\max\{n_0,n_1\}$ فإن $u_{n_0}<u_n$ و $\forall n\in\mathbb{N}: n>n_2\Longrightarrow u_{n_0}\ge u_n$ وهذا تناقض.	0.25
بوضع $n=N_1=N+1$ في (1) نحصل على $\forall\varepsilon>0;\exists N_1\in\mathbb{N}: u_{N_1}<\ell+\varepsilon$.	
3) **صحيح**..	0.5
نفرض $\lim\limits_{x\to a}(x)=\ell>0$ أي أنَ:	
$\forall\varepsilon>0\ ;\exists\delta>0: 0<\lvert x-a\rvert<\delta\Longrightarrow\lvert f(x)-\ell\rvert<\varepsilon$ ، من أجل $\varepsilon=\ell$ نحصل على	
$\exists\delta>0: 0<\lvert x-a\rvert<\delta\Longrightarrow\lvert f(x)-\ell\rvert<\ell$	0.5
$\Longrightarrow 0<f(x)<2\ell$	0.25
إذن $\exists\delta>0;\forall x\in]a-\delta,a[\cup]a,a+\delta[: f(x)>0$.	0.5
4) **صحيح**..	0.25
إذا كان التابع f مستمر عند 0فإن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ و منه فإن:	0.5
$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.	
التمرين الثاني(8 نقاط):	0.5
1) أ) $\forall x\in[0;1]: f'(x)=-2x<0$، f متناقص تماما على المجال $[0;1]$.	0.5
لدينا: $x\in[0;1]\Rightarrow 0\le x\le1\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 0\le f(x)\le1$.	0.5
ب) $\forall x\in[0;1]: f\circ f(x)=1-(1-x^2)^2=-x^4+2x^2$.	
$x=f\circ f(x)\Leftrightarrow x=-x^4+2x^2\Leftrightarrow x(x^3-2x+1)$	
$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1)=0$	
$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$ أو $x=\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$	1 3(0.5)
و منه $S=\left\{0,1,\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right\}$.$\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\notin I\right)$.	
جـ) $u_1=\frac{3}{4}$، $u_2=\frac{7}{16}=0.4375$، $u_3=\frac{207}{256}=0.80859$	0.5
نستعمل البرهان بالتراجع: $0\le u_0=\frac{1}{2}\le1$	0.5
نفرض $0\le u_n\le1$ و منه $f(1)\le f(u_n)\le f(0)$ أي أنَ $0\le u_{n+1}\le1$.	0.5
2) أ) $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=u_{2n+2}=f(u_{2n+1})=f(f(u_{2n}))=f\circ f(v_n)$.	0.5
$\forall n\in\mathbb{N}: w_{n+1}=w_{2n+1}=f(w_{2n})=f(f(w_{2n-1}))=f\circ f(w_n)$.	0.5
ب) بما أن f متناقص فإنَ $f\circ f$ متزايد إذن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتين تماما.	
بما أن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتين و محدودتين فهما متقاربتين.	0.5

0.5	ج) إنَ نهاتي $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هما حلي المعادلة $x = f\circ f(x)$ و منه
0.5	$\left(v_1 = u_2 = \frac{7}{16} < v_0 = u_0 = \frac{1}{2}\right) \Leftarrow$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \Leftarrow$. $\left(w_2 = u_3 = \frac{207}{256} > w_1 = u_1 = \frac{3}{4}\right) \Leftarrow$ $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1 \Leftarrow$.
0.5	بما أن المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتينهما 0 و 1 على الترتيب فإنَ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.
2	**<u>التمرين الثالث (7 نقاط):</u>**
0.5	$D_f = \mathbb{R}$ (1.
	2) أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x-\arctan x}{x^3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1-\frac{1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{3(x^2+1)} = \frac{1}{3}$.
0.5 0.5	ب) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{xe^{\frac{x}{x^2+1}}-0}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{x}{x^2+1}} = 1$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{\frac{3(x-\arctan x)}{x^2}-0}{x-0} = 3\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x-\arctan x}{x^3} = 3\frac{1}{3} = 1$. إذن $1 = f'(0+0) = {}'(0-0)$ و منه f يقبل الاشتقاق عند 0.
2	3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x\right) = +\infty - \infty$ ح تع
0.75 0.25	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-e^{\frac{x}{x^2+1}}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}}\frac{x^4-x^2}{(x^2+1)^2}) = 1$
	ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 1$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big) = 0$ و منه فإن المستقيم ذو المعادلة $y = x+1$ مقارب للمنحنى البياني (C_f)بجوار$+\infty$.