Exercice 1. *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y'$$

(1) *Montrer que* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

(2) *Trouver la classe d'équivalence du couple* $(0,0)$.

Correction 1

. $\mathcal{R}$ *est une classe d'équivalence si et seulement si elle est réfléxive et symétrique et transitive.*

(1) *a)* $\mathcal{R}$ *est réfléxive si et seulement si* $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

$$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow x+y=x+y\,.$$

D'où $\mathcal{R}$ *est réfléxive.*
b) $\mathcal{R}$ *est symétrique si et seulement si*

$$\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)$$

$$\begin{array}{rcl}(x,y)\mathcal{R}(x',y') & \Rightarrow & x+y=x'+y' \\ & \Rightarrow & x'+y'=x+y \\ & \Rightarrow & (x',y')\mathcal{R}(x,y)\end{array}$$

D'où $\mathcal{R}$ *est symétique.*
c) $\mathcal{R}$ *est transitive si et seulement si*

$$\forall (x,y),(x',y'),(x",y")\in\mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y')\wedge(x',y')\mathcal{R}(x",y") \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y")$$

$$\begin{array}{rcl}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\wedge(x',y')\mathcal{R}(x",y") & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} x+y=x'+y' \\ \wedge \\ x'+y'=x"+y" \end{array}\right. \\ & & \Rightarrow\quad x+y=x"+y" \\ & & \Rightarrow\quad (x,y)\mathcal{R}(x",y")\end{array}$$

D'où $\mathcal{R}$ *est transitive, Ainsi* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

(2) *Trouvons la classe d'équivalence du couple* $(0,0)$.

$$\begin{array}{rcl}C((0,0)) & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x,y)\mathcal{R}(0,0)\} \\ & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x+y=0\} \\ & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y=-x\} \\ & = & \{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\}.\end{array}$$

Exercice 2.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ *la relation* T *par*

$$(x,y)T(x',y') \Leftrightarrow |x-x'| \leq y'-y$$

(1) *Vérfier que* T *est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?*

(2) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *représenter l'ensemble* $\{x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y)T(a,b)\}$.

Correction 2

T *est une relation d'ordre si et seulement si elle est réfléxive et anti-symétrique et transitive.*

(1) *a)* $\mathcal{R}$ *est réfléxive si et seulement si* $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

$$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow |x-x| \leq y-y \Rightarrow 0 \leq 0\,.$$

D'où T *est réfléxive.*

b) T *est anti-symétrique si et seulement si*

$$\forall(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, ((x,y)T(x',y')) \wedge ((x',y')T(x,y)) \Rightarrow (x,y)=(x',y')$$

$$\begin{aligned}
(x,y)T(x',y') \wedge (x',y')T(x,y) \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} |x-x'| \leq y'-y \\ et \\ |x'-x| \leq y-y' \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad 2|x-x'| \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad |x-x'| = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = x' \\
&\Rightarrow \quad y'-y \geq 0 \wedge y-y' \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad y'-y \geq 0 \wedge y'-y \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad y'-y = 0 \Rightarrow y = y'.
\end{aligned}$$

D'où $(x,y)=(x',y')$, *alors* T *est anti-symétique.*

c) T *est transitive si et seulement si*

$$(x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbb{R}^2, ((x,y)T(x',y')) \wedge ((x',y')T(x",y")) \Rightarrow (x,y)T(x",y")$$

$$\begin{aligned}
(x,y)T(x',y') \wedge (x',y')T(x",y") \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} |x-x'| \leq y'-y \\ et \\ |x'-x"| \leq y"-y' \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} -y'+y \leq x-x' \leq y'-y \\ et \\ -y"+y' \leq x'-x" \leq y"-y' \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad -y"+y \leq x'-x" \leq y"-y \\
&\Rightarrow \quad |x-x"| \leq y"-y \\
&\Rightarrow \qquad\quad T\ x"
\end{aligned}$$

EXERCICE 3. *laisser aux étudiants*

Soit $\Re$ *une relation binaire* réflexive *et transitive. On* définit S *une relation par :*

$$xSy \Longleftrightarrow x\Re y \text{ et } y\Re x.$$

- *Montrer que* S *est une relation d équivalence et que* $\Re$ *permet de dénir une relation* d'ordre sur les classes d'équivalences de S

Correction. 3

- on a $x\Re x$ et $x\Re x \Longrightarrow xSx$, donc S reflexive
- si $xSy \Longrightarrow x\Re y$ et $y\Re x$.
$\Longrightarrow y\Re x$ et $x\Re y$
$\Longrightarrow ySx$, donc S symetrique
- xSy et $ySz \Longrightarrow (x\Re y$ et $y\Re x)$ et $(y\Re z$ et $z\Re y)$
$\Longrightarrow (x\Re y$ et $y\Re z)$ et $(z\Re y$ et $y\Re x)$
$\Longrightarrow (x\Re z)$ et $(z\Re x)$ (car $\Re$ est transitive)
$\Longrightarrow xSz$, donc S est transitive

alors S est une relation d'équivalence.

2) On définit sur l'ensemble des classes d'équivalence de S la relation $\triangle$ par: $\dot{x}\triangle\dot{y} \Longleftrightarrow x\Re y$.
La relation $\triangle$ est bien définie reflexive et transitive
· si $\dot{x}\triangle\dot{y}$ et $\dot{y}\triangle\dot{x}$ alors $x\Re y$ et $y\Re x$ alors xSy donc $\dot{x} = \dot{y}$
(d'aprés la propriétés: R relation d'équivalence alors, $xRy \Longleftrightarrow \dot{x} = \dot{y}$)
donc $\triangle$ est antisymetrique
alors $\triangle$ S.

Exercice 6: On définit une relation binaire S sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$xSy \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

1) Montrer que S est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 6: 1)
- soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x = x^n$ pour $n = 1 \in \mathbb{N}$ donc xSx, alors S reflexive
- soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, si xSy et ySx, alors $\exists n, m \in \mathbb{N}$, tel que $y = x^n \wedge x = y^m$.
On a alors: $x = x^{nm}$ donc $\ln x = nm \ln x$ d'où $\ln x\,(1 - nm) = 0$.
· si $x = 1$ alors $y = x^n = 1 = x$.
· si $x \neq 1$, alors $\ln x \neq 0$, d'où $nm = 1$, or $n, m \in \mathbb{N}$, donc $n = m = 1$ donc $x = y$, alors S est antisymetrique
- Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, si xSy et ySz alors $\exists n, m \in \mathbb{N}$; $y = x^n$ et $z = y^m$.
On a $z = x^{nm}$ avec $n, m \in \mathbb{N}$, donc xSz, donc S est transitive
et par conséquence S est une relation d'ordre.
2) Cet ordre n'est pas total car :
$\exists\, 2, 3 \in \mathbb{R}_+^*$, 2 n'est pas en relation avec 3 et 3 n'est pas en relation avec 2.
Càd: $\nexists n \in \mathbb{N}\ 2 = 3^n$ et $3 = 2^n$