Exercice 1.

Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$ et $\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$.

Exercice 2.

Soient $A, B, C \in P(E)$, établir:

1) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,
2) $A\subset B \Longleftrightarrow A\cup B=B$,
3) $A\cup B=A\cap C \Longleftrightarrow B\subset A\subset C$,

Exercice 4.

Soient $E=[0,1], F=[-1,1]$, et $G=[0,2]$ trois intervalles de $\mathbb{R}$.
Considérons l'application f de E dans G définie par :

$$f(x)=2-x,$$

et l'application g de F dans G définie par :

$$g(x)=x^2+1$$

(1) *Déterminer* $f(\{1/2\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1,1]), g^{-1}[0,2])$. أحسب
(2) *L'application f est-elle bijective ? justifier.* هل f تقابل ؟ برر
(3) *L'application g est-elle bijective ? justifier.* هل g تقابل ؟ برر

Exercice 5

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g\circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,} \quad \text{متباين}$$

$$g\circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.} \quad \text{غامر}$$

Montrer que :

$$(g\circ f \text{ et } h\circ g \text{ sont bijectives }) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

Correction 1

$$\begin{aligned} x\in\complement(A\cup B) &\Leftrightarrow x\notin A\cup B\\ &\Leftrightarrow x\notin A \text{ et } x\notin B\\ &\Leftrightarrow x\in\complement A \text{ et } x\in\complement B\\ &\Leftrightarrow x\in\complement A\cap\complement B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\in\complement(A\cap B) &\Leftrightarrow x\notin A\cap B\\ &\Leftrightarrow x\notin A \text{ ou } x\notin B\\ &\Leftrightarrow x\in\complement A \text{ ou } x\in\complement\\ &\Leftrightarrow x\in\complement A\cup\complement B.\end{aligned}$$

Solution 2.1 *1)* $A\setminus(B\cap C)=A\cap\complement_E(B\cap C)=(A\cap\complement_E B)\cup(A\cap\complement_E C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
2) • ($\Longrightarrow$) *supposons $A\subset B$, on a toujours $B\subset(A\cup B)$, pour $x\in A\cup B$ que $x\in A$ ou $x\in B$ on a $x\in B$, donc $(A\cup B)\subset B$. ainsi $A\cup B=B$.*
• ($\Longleftarrow$) *supposons que $A\cup B=B$. puisque $A\subset(A\cup B)$, on a $A\subset B$.*
3) • ($\Longrightarrow$) *supposons que $A\cup B=A\cap C$, on a $B\subset(A\cup B)=(A\cap C)\subset A\subset(A\cup B)=(A\cap C)\subset C$.*
• ($\Longleftarrow$) *supposons que $B\subset A\subset C$, $A\cup B=A=A\cap C$.*

Correction 4 (1) *(a)* $f(\{1/2\})=\{f(x)\in[0,2]/x=1/2\}$,
$f(1/2)=3/2\in[0,2]$, *alors :*

$$f(\{1/2\})=\{3/2\}.$$

(b) $f^{-1}(\{0\})=\{x\in[-1,1]/f(x)=0\}$.
On a $f(x)=2-x=0\Rightarrow x=2\notin[-1,1]$, *alors :*

$$f^{-1}(\{0\})=\emptyset.$$

(c) $g([-1,1])=\{g(x)\in[0,2]/x\in[-1,1]\}$, *on a* $x\in[-1,0]\cup]0,1]$.

$$\begin{aligned} x\in[-1,0] &\Rightarrow -1\le x\le 0\\ &\Rightarrow 0\le x^2\le 1\\ &\Rightarrow 1\le x^2+1\le 2\\ &\Rightarrow g(x)\in[1,2]\subset[0,2]\end{aligned}$$

d'où $g([-1,0]) = [1,2]$

$$x \in]0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 < x^2+1 \leq 2 \Rightarrow g(x) \in]1,2] \subset [0,2]$$

d'où $g(]0,1]) =]1,2]$, $g([-1,1]) = [1,2]$.

(d) $g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1] / g(x) \in [0,2]\}$, *on a*

$$g(x) \in [0,2] \Rightarrow 0 \leq x^2+1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow (-1 \leq x^2 < 0) \vee (0 \leq x^2 \leq 1)$$

l'ingalité $(-1 \leq x^2 < 0)$ *n'a pas de solutions.*

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Ainsi

$$g^{-1}([0,2]) = \emptyset \cup [-1,1] = [-1,1].$$

(2) *Comme* $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ *c'est à dire l'élément* $0 \in [0,2]$ *n'admet pas d'antécédent par* f *dans* $[-1,1]$ *donc* f *n'est pas surjetive et par suite n'est pas bijective.*

(3) *L'application* g *est paire donc* $g(-1) = g(1)$ *or* $-1 \neq 1$ *donc* g *n'est pas injective d'où* g *ne peut être bijective, aussi on remarque que* $g([-1,1]) = [1,2] \neq [0,2]$ *donc* g *n'est pas surjecive, alors n'est pas aussi bijective.*

Correction5

1. Supposons $g\circ f$ injective, et montrons que f est injective : soit $a,\ a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :
$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$
c'est la définition de f injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.
3. Un sens est simple $(\Leftarrow)$ si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.
Pour l'implication directe $(\Rightarrow)$: si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point g est surjective.
Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.