برمجة الأعداد الصحيحة

في البرامج الخطية كثيراً ما يعطي الحل الأمثل متغيرات قيمها تحوي أرقام بعد الفاصلة، لكن بعض المتغيرات الاقتصادية خاصةً المتعلقة بالمتغيرات الفيزيائية لا يمكن تجزئتها وهو ما أدى إلى البحث في التخلص من هذا المشكل فنتج ما يسمى بالبرمجة بالأعداد الصحيحة.

برمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرق البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمها أعداد طبيعية ويتطلب ذلك المرور بالمراحل التالية:

المرحلة الأولى:

إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، فإذا حصل على حل أمثل متغيراته لا تكون كلها قيم طبيعية ننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

وتسمى مرحلة التفريغ وفيها تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي بهدف الحصول على حل أمثل أخر متغيراته تأخذ قيم صحيحة، وتستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل إلى حل أمثل متغيراته لأعداد طبيعية.

طريقة التحديد والتفريغ:

إذا كانت قيم المتغيرات المتحصل عليها في الحل الأمثل طبيعية نتوقف ويكون ذلك هو الحل الأمثل المراد الوصول إليه، وإذا كانت قيم المتغيرات المتحصل عليها في الحل الأمثل غير ذلك فعندها نقوم بتوليد برنامج جديد بإضافة قيد أخر للبرنامج الأصلي وفق الأتي:

إذا كان المتغير في الحل الأمثل X_i يأخذ قيم غير صحيحة نكتبه ضمن المجال التالي:

$$b_{i1} < X_i < b_{i2}$$

حيث b_{i1}، b_{i2} أعداد طبيعية وعليه يتم اشتقاق قيدين جديدين هما: $X_i \geq b_{i2}$ و $X_i \leq b_{i1}$

ونضيف كل قيد لوحده للبرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين، طبعا نقوم بحل كل برنامج حلا مستقلا.

إذا كانت متغيرات الحل الأمثل طبيعية نتوقف ونأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة لدالة الهدف بين الحلين في حالة التعظيم والعكس في حالة التدنئة.

أما في حالة كانت متغيرات الحل الأمثل غير طبيعية نستمر في تفريغ البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة لدالة الهدف لغاية الحصول على حل أمثل قيم متغيراته طبيعية.

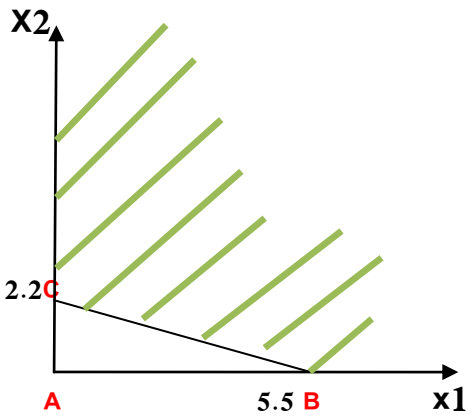
مثال (1):

$$\text{Max} : Z = 30X_1 + 3X_2$$

$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \leq 33 \\ X_1 \geq 0 \; ; \; X_2 \geq 0 \quad \text{وهي صحيحة} \end{cases}$$

المطلوب: أوجد حلول البرنامج الخطي.

الحل:الحل البياني

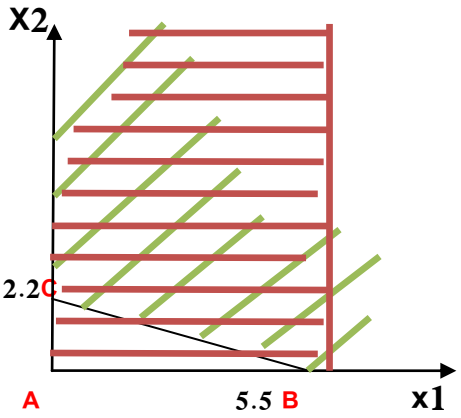
البرنامج الأصلي	
النقطة A (x1.x2)= (0.0) ⟶ z=0 النقطة B (x1.x2)= (5.5 .0) ⟶ z=165 النقطة C (x1.x2)= (0. 2.2) ⟶ z=6.6 وعليه الحل الأمثل (x1.x2)= (5.5 .0) حيث Z=165 نلاحظ أن قيمة X1 غير صحيحة ويمكن كتابتها 5<X1<6 يمكن استنتاج قيدين القيد الأول X1<5 والقيد الثاني X1>6 وعليه فالبرنامج الأصلي يتفرع إلى برنامجين كمايلي:	

البرنامج الأول

$$Max : Z= 30X_1 +3X_2$$

$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \le 33 \\ X_1 \le 5 \end{cases}$$

$X_1 \ge 0$; $X_2 \ge 0$ وهي صحيحة



(x1.x2)= (0.0) ⟶ z=0 النقطة A

(x1.x2)= (5. 0.2) ⟶ z=150.6 النقطة B

(x1.x2)= (0. 2.2) ⟶ z=6.6 النقطة C

وعليه الحل الأمثل (x1.x2)= (5. 0.2) حيث Z=150.6

نلاحظ أن قيمة X2 غير صحيحة ويمكن كتابتها 0<X0,2<1

يمكن استنتاج قيدين القيد الأول X1<0 والقيد الثاني X1>1

وعليه فالبرنامج الثاني يتفرع إلى برنامجين كمايلي:

البرنامج الثاني

$$Max : Z= 30X_1 +3X_2$$

$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \le 33 \\ X_1 \ge 6 \end{cases}$$

$X_1 \ge 0$; $X_2 \ge 0$ وهي صحيحة

برنامج متناقض
وليس له حلول لذلك
يتم الاستغناء عنه

البرنامج الثالث

$$Max : Z= 30X_1 +3X_2$$

$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \le 33 \\ X_1 \le 5 \\ X_2 \ge 1 \end{cases}$$

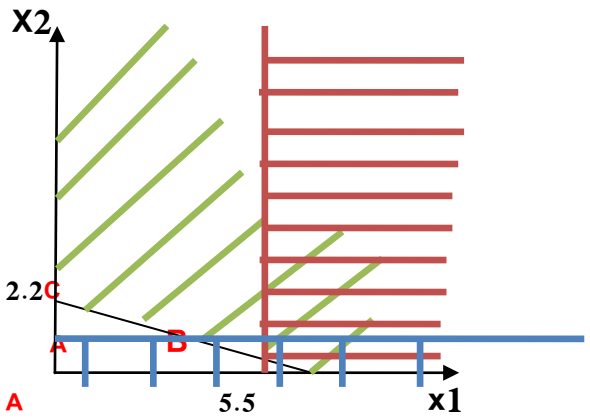
$X_1 \ge 0$; $X_2 \ge 0$ وهي صحيحة

البرنامج الرابع

$$Max : Z= 30X_1 +3X_2$$

$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \le 33 \\ X_1 \ge 6 \\ X_2 \le 0 \end{cases}$$

$X_1 \ge 0$; $X_2 \ge 0$ وهي صحيحة



النقطة A (x1.x2)= (0.1) ⟶ z=3

النقطة B (x1.x2)= (3. 1) ⟶ z=93

النقطة C (x1.x2)= (0. 2.2) ⟶ z=6.6

وعليه الحل الأمثل (x1.x2)= (3. 1) حيث Z=93

نلاحظ أن قيمة كل من x1 x2 هي قيم أعداد طبيعية وعليه

فالحل هو الحل الأمثل للبرنامج الأصلي

برنامج متناقض
وليس له حلول لذلك
يتم الاستغناء عنه

ملاحظة:

قمنا في المثال السابق بحل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية لأنه يوجد متغيرين فقط، أما في حالة وجود أكثر من متغيرين فإننا نقوم بحل البرنامج بطريقة السمبلكس