الفصل السادس: الدفعات المالية

إن الأسر والمؤسسات تسدد دوريا قيم فواتير الكهربائية والمياه وكذا أقساط الايجار، كما أن العمال والموظفين وغيرهم يتلقون شهريا أجرتهم ويدفعون بعض الاشتراكات الاجتماعية والضرائب وغيرها من المتطلبات ذات الصيغة الدورية، وبالتالي تنتج عن كل هذه العمليات تعاملات دورية بمبالغ وقيم تنتقل أو تتدفق من جانب إلى آخر وهي ما يطلق عليها بالدفعات المالية.[1]

1. تعريف الدفعات الثابتة

الدفعات هي مبالغ مالية متساوية تدفع دوريا في فترات متساوية، وتسمى فترة السداد أو الدفع بالمدة، وقد تكون هذه المدة سنة، سداسي، ثلاثي أو حتى شهرية.[2] وتتميز هذه الدفعات بما يلي[3]:

- قيمة الدفعات المقدمة دوريا متساوية؛
- الفترة الفاصلة بين دفعة وأخرى متساوية؛
- معدل فائدة متساوي؛
- تحديد تاريخ أول دفعة وآخر دفعة؛
- عدد الدفعات.

2. تصنيف الدفعات

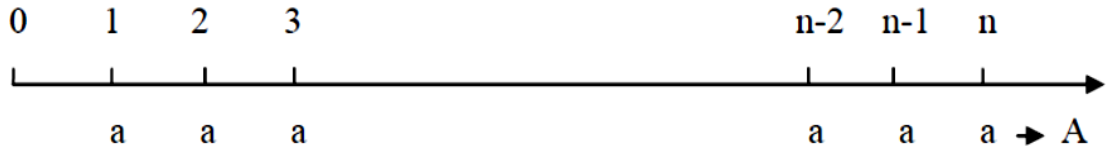
هناك تصنيفات عديدة للدفعات المالية لكننا سنتطرق في هذا المحور إلى نوعين منها فقط وهي:

I. **دفعات نهاية المدة (العادية)**: إذ تدفع عادة لتسديد الديون، ولذلك تسمى دفعات الاستهلاك، وتدفع نهاية كل فترة سداد أي عند تقديم آخر دفعة يكون قد تكون رأسمال وهو هدف العملية، في حين يمكن تحديد قيمة مجموع هذه الدفعات في نقطة الصفر، أو بداية الفترة الأولى التي تتطابق مع بداية مدة الدفع الكلية وهذه القيمة تعد قيمة حالية للدفعات.

1 ناصر دادي عدون، مرجع سبق ذكره، ص77.
2 منصور بن عوف عبد الكريم، مدخل إلى الرياضيات المالية، الطبعة الخامسة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2009، ص 73.
3 سعاد عون الله، محاضرات في الرياضيات مالية، جامعة ابن خلدون تيارت، الجزائر، 2017-2018، ص ص 47-48.

1. **جملة دفعات نهاية المدة:** وهي القيمة المكتسبة أو المحصلة والتي تمثل ما تجمع للشخص المسدد في نهاية عدد من الدفعات (عدد من الفترات).
2. **قانون جملة دفعات نهاية المدة:** إذا افترضنا أن شخص كان يسدد في نهاية كل وحدة زمنية دفعة من المال قدرها a لمدة n من وحدات الزمن بمعدل فائدة مركبة قدره i، كما هو موضح في المحور التالي:

والجدول التالي يوضح لنا جمل الدفعات منفصلة بتاريخ n :



الدفعات	مدة الإيداع أو الرسملة	الجملة عند النقطة n
الأولى	فترة (n-1)	$A_1 = a(1+i)^{n-1}$
الثانية	فترة (n-2)	$A_2 = a(1+i)^{n-2}$
الثالثة	فترة (n-3)	$A_3 = a(1+i)^{n-3}$
..	..	..
..	..	..
n-1	فترة واحدة	$A_{n-1} = a(1+i)$
n	0 فترة	$A_n = a(1+i)^0 = a$

المصدر: ناصر دادي عدون، **الرياضيات المالية**، دار المحمدية الحامة، الجزائر، 1995. ص 79.

وبالتالي جملة الدفعات المحصل عليها في نهاية المدة تساوي مجموع القيم المكتسبة لكل دفعة في وحدة الزمن n ومنه يمكن نكتب[4]:

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-1}$$

نلاحظ أن الجملة هي عبارة عن متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها $(1+i)$ ، وعدد حدودها n، وبتطبيق قانون مجموع متتالية الهندسية المتزايدة نجد:

4 ناصر دادي عدون، مرجع سبق ذكره، ص ص 79-80.

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ملاحظة:

بالنسبة لعبارة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ يمكن حسابها بالآلة الحاسبة، أو استخراجها من الجدول المالي رقم 3 وهو الذي يسمح بتحديد قيمة الكسر بناء على تقاطع عمود المعدل مع سطر عدد الدفعات.[5]

مثال: قام شخص بتسديد دين له بخمس دفعات متساوية لنهاية السنة، فإذا كانت قيمة الدفعات هي 2000 دج، أوجد الجملة المركبة لما يسدده هذا الشخص نهاية المدة علما أن سعر الفائدة هو 5%.

الحل:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_n = 2000\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05}$$

$$V_n = 11051{,}2625$$

حيث قيمة $\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05}$ من الجدول المالي رقم 3 هي $5{,}52563125$ ، وهي نفس القيمة التي تم حسابها بالآلة الحاسبة.

- **استنتاج عناصر جملة دفعات نهاية المدة:** باستعمال علاقة جملة الدفعات يمكن[6]:

❖ **حساب مبلغ الدفعة a:**

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

5 نور الدين زعيبط، مرجع سبق ذكره، ص 82.
6 سعاد عون الله، مرجع سبق ذكره، ص 49.

ومنه:

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

مثال: قام محمد بتسديد دين قيمة جملته 3152,5 دج، بواسطة **3** دفعات ثابتة وبمعدل فائدة 5 سنويا %، فما هو مقدار كل دفعة.

الحل:

لدينا:

$$a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$a = 3152{,}5 \frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^3 - 1} = 1000$$

❖ **حساب عدد الدفعات n:**

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال:

يدفع شخص في نهاية كل فترة دفعة ثابتة قيمتها 5000 دج، فبلغت القيمة المكتسبة في نهاية المدة:22530,56 دج، فإذا كان معدل الفائدة هو 8% فما هو عدد الدفعات؟

الحل:

لدينا:

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{22530{,}56}{5000} = \frac{(1+0{,}08)^n - 1}{0{,}08}$$

$$1{,}36048896 = (1+0{,}08)^n$$

$$log 1{,}36048896 = n\, log 1{,}08$$

$$n = 4$$

❖ **حساب معدل الفائدة i:**

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال: قام عبد الرحمن بتسديد ما عليه من ديون بواسطة 5 دفعات ثابتة لنهاية السنة قيمة كل منها 1000دج، حيث بلغت جملة الدفعات 5750,75 دج، احسب معدل الفائدة.

الحل:

لدينا

$$\frac{V_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{5750,75}{1000} = \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

$$5,75075 = \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

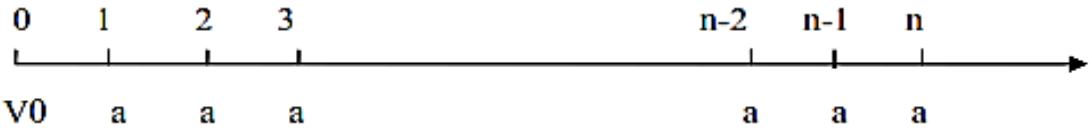
من الجدول المالي رقم 3 ووفقا لعمود الدفعات 5 نبحث عن قيمة $5,75075$ وعندا إيجادها نحدد المعدل الذي يوافق سطرها، والذي نجده يساوي نسبة 7%.

3. القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

- **تعريف:** تعرف القيمة الحالية بأنها مجموع القيم الحالية لعدد الدفعات الثابتة أي قيمة الدفعات عند إمضاء عقد القرض أو الاستثمار وهذا في الزمن (0)، أي فترة قبل تسديد قيمة الدفعة الأولى[7].
- **قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:**

نرمز للقيمة الحالية في الزمن (0) بالرمز V_O، وباستعمال مجموع القيم الحالية للدفعات منفصلة:

7 منصور بن عوف عبد الكريم، مرجع سبق ذكره، ص81.



والجدول التالي يوضح لنا القيم الحالية للدفعات منفصلة عند الزمن (0):

الدفعات	مدة الدفعات	القيم الحالية عند النقطة 0
الأولى	فترة واحدة	$V_{O_1} = a(1+i)^{-1}$
الثانية	فترتين	$V_{O_2} = a(1+i)^{-2}$
الثالثة	ثلاث فترات	$V_{O_3} = a(1+i)^{-3}$
..	..	..
..	..	..
n-1	فترة(n-1)	$V_{O_{n-1}} = a(1+i)^{-(n-1)}$
n	فترة n	$V_{O_n} = a(1+i)^{-n}$

المصدر: ناصر دادي عدون، **الرياضيات المالية**، دار المحمدية الحامة، الجزائر، 1995.ص 87.

وبالتالي فإن مجموع القيم الحالية عند الزمن (0) هو[8]:

$$V_O = a(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + \cdots + a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-n}$$

هذا المجموع يشكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)^{-n}$ وعدد حدودها n وأساسها $(1+i)$، وبتطبيق قانون مجموع متتالية هندسية نجد:

$$V_O = a(1+i)^{-n}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right]$$

$$V_O = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ويمكن الاعتماد على الجدول المالي رقم 4 لحساب قيمة الكسر، كما يمكن حسابها بالآلة الحاسبة.

8 ناصر دادي عدون، مرجع سبق ذكره، ص ص 86-88.

مثال:

يسدد أحمد في نهاية كل سنة مبلغ 10000دج بمعدل 6% سنويا ولمدة 8 سنوات. أحسب القيمة الحالية لهذه الدفعات ثم جملتها في نهاية الدفع.

الحل:

- **حساب القيمة الحالية لهذه الدفعات:**

$$V_O = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_O = 10000\frac{1-(1+0{,}06)^{-8}}{0{,}06} = 62097{,}93$$

- **حساب جملة هذه الدفعات:**

$$V_{0n} = a\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$V_{0n} = 10000\frac{(1+0{,}06)^{8}-1}{0{,}06} = 98974{,}68$$

- **استنتاج عناصر القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:** باستعمال علاقة القيمة الحالية يمكن[9]:

❖ **حساب قيمة الدفعة a:**

$$a = V_{On}\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

❖ **حساب عدد الدفعات n:**

$$\frac{V_{On}}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

❖ **حساب معدل الفائدة i:**

$$\frac{V_{On}}{a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

حيث يتم استخراج نسبة المعدل الفائدة i من الجدول المالي رقم 4 ،وذلك بالاعتماد على قيمة الكسر $\frac{V_n}{a}$

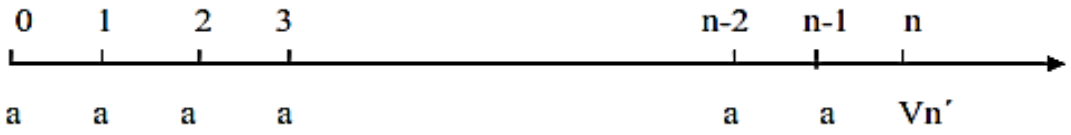
9 سعاد عون الله، مرجع سبق ذكره، ص ص 51-52.

II. دفعات بداية المدة (غير عادية): تدفع عادة لتكوين رأسمال وتكون في بداية كل فترة، أو لسداد دين إن نص العقد على ذلك.

1. جملة دفعات بداية المدة: وهي القيمة المحصلة أو المكتسبة والتي تحسب في نهاية مدة السداد للقرض أو تكوين رأس المال، أي بعد القسط الأخير بفترة زمنية واحدة. [10]

2. قانون جملة دفعات بداية المدة:

لنفترض أن شخص يوظف مبلغ قدره a، في أول كل وحدة زمنية لدى بنك يحسب الفوائد بالمعدل i ، وذلك لمدة nمن الوحدات الزمنية، والشكل الموالي يوضح ذلك:



ويمكن توضيح جمل الدفعات من خلال الجدول التالي:

الدفعات والفترات	مدة الإيداع أو الرسملة	الجملة عند النقطة n
الأولى	n فترة	$A_1 = a(1+i)^n$
الثانية	(n-1) فترة	$A_2 = a(1+i)^{n-1}$
الثالثة	(n-2) فترة	$A_3 = a(1+i)^{n-2}$
..	..	..
..	..	..
n-1	2 فترة	$A_{n-1} = a(1+i)^n$
n	1 فترة	$A_n = a(1+i)$

المصدر: ناصر دادي عدون، **الرياضيات المالية**، دار المحمدية الحامة، الجزائر، 1995.ص92.

قيمة الدفعات لبداية المدة هي مجموع الجمل المركبة لكل دفعة من دفعات نهاية المدة أي في الزمنn ، فترة بعد تسديد الدفعة الأخيرة، حيث[11]:

10 منصور بن عوف عبد الكريم، مرجع سبق ذكره، ص ص 73-87.
11 سعاد عون الله، مرجع سبق ذكره، ص 52.

$$A = a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^n$$

وبداية من آخر جملة تكون لدينا متتالية هندسية متصاعدة حدها الأول $a(1+i)$،وأساسها $(1+i)$، وعدد حدودها n ، وطبقا لمجموع المتتالية الهندسية فإن[12]:

$$v\grave{}_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$v\grave{}_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}\right] - 1$$

ملاحظة: من خلال هذه العلاقة يمكن استنتاج القانون الخاص بعناصر الدفعات الغير العادية المتمثلة في قيمة الدفعة والمدة بالإضافة الى المعدل وذلك بالاعتماد على العمليات الحسابية، وكذا الجدول المالي رقم 3 مثل ما رأينا في الدفعات الثابتة العادية.

مثال:

قام أحمد بإيداع دفعات ثابتة سنوية (لبداية السنة)، قيمة كل منها 12000دج بمعدل فائدة 10% سنويا، ولمدة 8سنوات. أحسب ما تجمع لهذا الشخص في نهاية هذه المدة.

الحل:

لدينا:

$$v\grave{}_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}\right] - 1$$

$$v\grave{}_n = 12000\left[\frac{(1+0{,}1)^{8+1} - 1}{0{,}1}\right] - 1$$

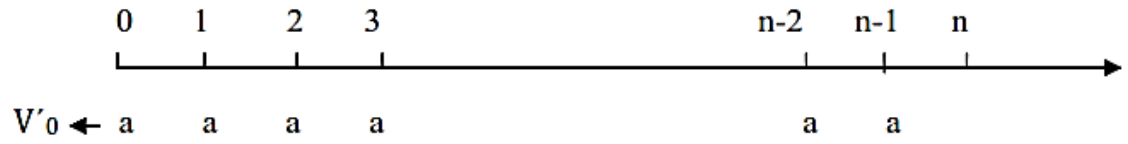
$$v\grave{}_n = 150953.72$$

12 ناصر دادي عدون، مرجع سبق ذكره، ص93.

3. القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

- **تعريف:** تعرف القيمة الحالية بأنها مجموع القيم الحالية لعدد الدفعات الثابتة المتساوية في الزمن (0)، أي عند أول دفعة [13].
- **قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:**

إن القيمة الحالية لدفعات بداية المدة هي عبارة عن مجموع القيم الحالية لكل دفعة من الدفعات، والشكل التالي يوضح ذلك:



حيث:

- القيمة الحالية للدفعة الأولى : $v_{o1}^{`} = a$
- القيمة الحالية للدفعة الثانية: $v_{o2}^{`} = a(1+i)^{-1}$
- القيمة الحالية للدفعة الثالثة: $v_{on-1}^{`} = a(1+i)^{-(n-1)}$

الجدول التالي يوضح لنا القيم الحالية للدفعات منفصلة عند الزمن (0):

الدفعات	مدة الدفعات	القيم الحالية عند النقطة 0
الأولى	فترة واحدة	$V_{O_1} = a$
الثانية	فترتين	$V_{O_2} = a(1+i)^{-1}$
الثالثة	ثلاث فترات	$V_{O_3} = a(1+i)^{-2}$
..	..	..
n-1	فترة(n-1)	$V_{O_{n-1}} = a(1+i)^{-(n-2)}$
n	فترة n	$V_{O_n} = a(1+i)^{-(n-1)}$

13 منصور بن عوف عبد الكريم، مرجع سبق ذكره، ص92.

وبالتالي فإن مجموع القيم الحالية هو[14]:

$$\grave{v_o} = a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-(n-2)} + \cdots + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1} + a$$

وبداية من آخر جملة تكون لدينا متتالية هندسية متصاعدة حدها الأول $a(1+i)^{-(n-1)}$ ،وأساسها $(1+i)$، وعدد حدودها n ، وطبقا لمجموع المتتالية الهندسية فإن[15]:

$$\grave{v_o} = a(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

مثال:

أراد أحمد تكوين رأسمال لمدة 5 سنوات، حيث قام بإيداع في بداية كل سنة لدى البنك مبلغ قيمته 12500دج، بمعدل فائدة 8%. أحسب القيمة الحالية لهذه الدفعات.

الحل:

لدينا:

$$\grave{v_o} = a(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$\grave{v_o} = 12500(1+0{,}08)\left[\frac{1-(1+0{,}08)^{-5}}{0{,}08}\right]$$

$$\grave{v_o} = 53901{,}58$$

ملاحظة: من خلال هذه العلاقة يمكن استنتاج القانون الخاص بعناصر القيمة الحالية لدفعات الغير العادية المتمثلة في قيمة الدفعة والمدة بالإضافة الى المعدل وذلك بالاعتماد على العمليات الحسابية، وكذا الجدول المالي رقم 4 مثل ما رأينا في القيمة الحالية الدفعات الثابتة العادية.

14 ناصر دادي عدون، مرجع سبق ذكره، ص ص 86-88.
15 سعاد عون الله، مرجع سبق ذكره، ص 54.