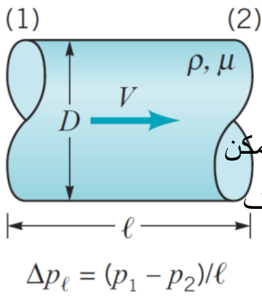
4. تحليل الوحدات أو الأبعاد

الغرض من تحليل الأبعاد أو الوحدات هو تحديد وتقليل المتغيرات التي تؤثر على ظاهرة فيزيائية. نأخذ على سبيل المثال حالة القناة ونبحث عن انخفاض الضغط عن طريق تحليل الأبعاد.

ليكن التدفق المستقر غير القابل للضغط لسائل نيوتني ذو لزوجة μ وكتلة حجمية ρ يسيل بسرعة v عبر أنبوب أملس بطول l وقطر D. نريد إيجاد انخفاض الضغط ΔP في الأنبوب بدلالة متغيرات التدفق الأخرى. للقيام بذلك نستخدم نظرية باكنغهام- Buckingham -أو نظرية π.



<u>نظرية باكنغهام بي (π).</u>

تنص النظرية على أنه "إذا كانت المعادلة التي تتطلب k متغيرات متجانسة الأبعاد، فيمكن اختزالها إلى علاقة k - r حدود لا أبعاد لها، حيث r هو الحد الأدنى لعدد الأبعاد اللازمة لوصف جميع المتغيرات". يتم الإشارة إلى الحدود بعبارة "الحدود π_i".

لتكن معادلة فيزيائية بعدد k من متغيرات، نكتب:

$$\boldsymbol{u_1 = f(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k)}$$

وفقًا لنظرية Pi ، يمكن إعادة صياغة المعادلة على النحو التالي:

$$\pi_1 = \phi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r})$$

مع ϕ دالة لكل من $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r}$ ، يتم ايجاد الحدود π_i في الخطوات التالية:

<u>الخطوة 1:</u> كتابة كل المتغيرات المؤثرة في الظاهرة الفيزيائية. يشترط ان تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض، أي انه لا يمكن اخذ متغيرين مشتقين من بعضهما مثل الثقل الحجمي و الكتلة الحجمية، في الحالة المدروسة لدينا:

μ ، ρ، v ، D و نبحث عن ΔP_l.

<u>الخطوة 2:</u> نختار نظام الوحدات الذي سنستخدمه. يوجد نظام القوة، الطول و الزمن FLT أو الكتلة، الطول و الزمن MLT.بعدها نكتب وحدات المتغيرات التي احصيناها في الخطوة الأولى في النظام المختار. في حالتنا نختار MLT و نكتب الوحدات لكل متغير، لدينا:

$\Delta P_l \equiv \frac{kg}{m^2 s^2} = M^1 L^{-2} T^{-2}$	$D \equiv m = L^1$	$v \equiv \frac{m}{s} = L^1 T^{-1}$	$\rho \equiv \frac{kg}{m^3} = M^1 L^{-3}$	$\mu \equiv Pa\ s = \frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms} = \frac{M}{LT} = M^1 L^{-1} T^{-1}$

عدد الحدود π_i يساوي k-r ، مع k عدد المتغيرات (الخطوة 1) و r عدد الأبعاد اللازمة للتعبير عن الحدود π_i (الخطوة 2).
في حالتنا : k = 5 متغيرات في الخطوة الاولى و r = 3 وحدات مستعملة في الخطوة الثانية. اذا عدد الحدود يساوي k-r. =5-3=2

الخطوة 4: نحدد عددًا من المتغيرات المتكررة، ويجب ألا تحتوي هذه المتغيرات على المتغير التابع الذي سيكون موضوع الدراسة ΔP. كما انها يجب ان تحتوي على اكبر عدد ممكن من الوحدات و يكون شكلها بسيط قدر الإمكان. في حالتنا نختار ρ، V و D.

الخطوة 5: نقوم بتشكيل الحدود π_i بضرب المتغيرات غير المتكررة بجداء المتغيرات المتكررة المرفوعة إلى قوة تجعل المجموعة بلا أبعاد. يكون لكل حد π_i الشكل($u_i(u_1^a u_2^b u_3^c \ldots$ حيث تكون u_i متغيرًا غير متكرر ؛ u_1 و u_2 و u_3 هي المتغيرات المتكررة ويتم تحديد الأسس a و b و c على أنها تركيبة بلا أبعاد. في حالتنا، فإن الحدود π_i هي:

$$\pi_1 = D^a V^b \rho^c \Delta P_l$$

نعوض الوحدات المكتوبة في الخطوة 2 و نساويها للحد الذي ليس له وحدة :

$$M^0 L^0 T^0 = L^a (L^1 T^{-1})^b (M^1 L^{-3})^c (M^1 L^{-2} T^{-2})$$

نبحث عن قيم الأسس a و b و c بالنسبة للطول L لدينا : $a + b - 3c - 2 = 0$ ، الزمن T لدينا : $-b - 2 = 0$ و أخيرا الكتلة M نحصل على : $c + 1 = 0$. حل هذه لمعادلات يعطي : $c = -1$، $b = -2$ و $a = 1$. عندما نعوض الأسس في معادلة الحد الأول نجد :

$$\pi_1 = D^1 V^{-2} \rho^{-1} \Delta P = \frac{D \Delta P_l}{\rho V^2}$$

نلاحظ ان هذا الحد ليس له و حدة.

نكمل بنفس الطريقة حتى ننهي جميع المتغيرات الغير متكررة.

$$\pi_2 = D^a V^b \rho^c \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^a (L^1 T^{-1})^b (M^1 L^{-3})^c \left(M^1 L^{-1} T^{-1}\right)$$

$$a + b - 3c - 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

$$-b - 1 = 0 \rightarrow b = -1$$

$$c + 1 = 0 \rightarrow c = -1$$

ما يعطي:

$$\pi_2 = D^{-1} V^{-1} \rho^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{Re}$$

الخطوة 6: التحقق من أن الحدود المحسوبة بلا أبعاد.

$$\pi_1 = \frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} \equiv \frac{m\dfrac{kg\frac{m}{s^2}}{m\,m^2}}{\dfrac{kg}{m^3}\dfrac{m^2}{s^2}} = 1 \qquad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{\dfrac{kg\frac{m}{s^2}}{m^2}s}{\dfrac{kg}{m^3}\dfrac{m}{s}m} = 1$$

الخطوة 7: تشكيل العبارة:

$$\pi_1 = \phi(\pi_2) \leftrightarrow \frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right) = \phi_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = \phi_1(Re)$$

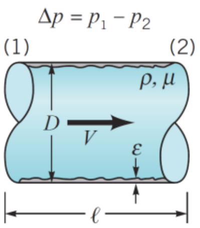
مما يبين أن خسارة الضغط الخطي له علاقة بعدد رينولدس، تبقى الدالة ϕ أو ϕ_1 مجهولة حيث يجب حسابها. لقد اثبتت التجربة أنه في حالة الجريان الصفائحي: $\frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}\frac{1}{2}\left(\frac{D}{l}\right) = \frac{32}{Re}$

أي أنه $\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{64}{Re}\left(\frac{l}{D}\right) = f\left(\frac{l}{D}\right)$ ،

يسمى f معامل الاحتكاك الخطي في السريان الصفائحي $f = \frac{64}{Re}$. في هذه الحالة الدالة ϕ ثابتة وهي عبارة عن $\phi = 128\left(\frac{l}{D}\right)$

نلاحظ هنا انه تمكنا من اختصار خمس متغيرات الى متغيرين وهذا ما يوفر الجهد في التجارب او الحساب.

خسارة الضغط الخطية في القنوات الخشنة



لتكن قناة تنقل مائعا، إذا كان الجريان متطور فان الخسارة في الضغط متعلقة ب:

$$\Delta p = F(\rho, \mathrm{v}, D, \mu, l, \varepsilon)$$

ε هي خشونة السطح الداخلي للقناة، الجدول التالي يعرض خشونة بعض الاسطح.

Equivalent Roughness for New Pipes [Adapted from Moody (Ref. 7) and Colebrook (Ref. 8)]

Pipe	Equivalent Roughness, ε Feet	Equivalent Roughness, ε Millimeters
Riveted steel	0.003–0.03	0.9–9.0
Concrete	0.001–0.01	0.3–3.0
Wood stave	0.0006–0.003	0.18–0.9
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Commercial steel or wrought iron	0.00015	0.045
Drawn tubing	0.000005	0.0015
Plastic, glass	0.0 (smooth)	0.0 (smooth)

مادة القناة	الخشونة (ε mm)
حديد صلب مبرشم	9.0-0.9
أسمنت	3.0-0.3
الخشب المصقول	0.9-0.18
حديد الزهر	0.26
الحديد المجلفن	0.15
الصلب التجاري	0.045
انابيب مسحوبة	0.0015
بلاستيك أو زجاج	0 املس

نريد ان نجد بطريقة تحليل الوحدات العبارة التالية:

$$\frac{\Delta p}{\rho\frac{\mathrm{v}^2}{2}} = F\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}\right)$$

5 . Energy equation for a flow in a pipe with pressure loss.

5.1 The first principle for a 1D flow is stationary and without external work.

The energy balance is written: $\Delta\dot{Q} + \Delta\dot{W} = \Delta\dot{E} = \Delta(\dot{m}e)$

Where $\dot{m}$ is the mass flow rate. In this case, heat loss is caused by friction; the only non-zero work is that of the pressure forces at the entrance and exit of the control volume. The net power lost as heat is: $\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_s - \dot{Q}_e = \dot{Q}_{net}$

The power developed in the form of work is equal to:

$$\Delta\dot{W} = -\Delta(pvs) = -[(pvs)_s - (pvs)_e],$$ v is the velocity of the flow.

If we apply the first law equation to the control volume shown in the figure, we find:

$$\dot{Q}_{net} - [(pvs)_s - (pvs)_e] = \Delta(\dot{m}e) = \left[\dot{m}\left(u + \frac{V^2}{2} + gz\right)\right]$$

with $\dot{m} = \rho v s$, (v velocity and u internal energy). Rearranging the terms gives:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = \left(\frac{p_s}{\rho_s} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho_e} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e\right) \text{ with } \dot{Q}_{net} = \frac{\dot{q}_{net}}{\dot{m}}$$

If there is no friction, we must find the Bernoulli relation, then the term:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = 0$$

According to the second law of thermodynamics if there is friction, then Δs=ΔQ/T>0:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) > 0 \quad \text{and} \quad \dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = \text{friction losses}$$

In general, the energy equation for a stationary incompressible flow between two stations (1) and (2) is written:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1\frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1\frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

The factors α_1 and α_2 compensate for the velocity profile, which is not uniform; if the latter is uniform, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. The height of losses is due to viscous losses. To find this height, let's compare the equation found with the equation:

$$\frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r} \quad \text{Which is also written}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho g} - l \sin\theta = \frac{2\tau l}{\rho g r}$$

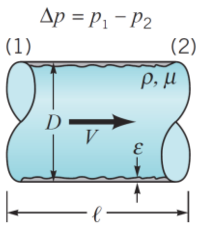
We note that $\Delta p = p_1 - p_2$, $z_2 - z_1 = l \sin\theta$ and $v_1 = v_2$ for constant section pipe. Also : $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$, which gives : $h_L = \frac{2\tau l}{\rho g r} = \frac{4 l \tau_w}{\rho g D}$.

6. Linear or major pressure losses

Consider a circular pipe in which a fluid flows. If the flow is developed, the pressure drop is:

$$\Delta p = F(\rho, \mathrm{v}, D, \mu, l, \varepsilon)$$

With ε is the roughness of the internal surface of the pipe.



The dimensional analysis gives: $\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} = F\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}\right)$

If we assume that the pressure drop is proportional to *l/D* we can write:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} = \frac{l}{D} \phi' \left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{l}{D} \phi \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

The term $\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} \frac{D}{l}$ is called the friction coefficient *f*. So for horizontal pipe:

$\Delta p = f \frac{l}{D} \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$ where $f = \phi \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$

For fully developed laminar flow $f = \frac{64}{Re}$ independently of ε/D. For turbulent flow $f = \phi \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$.

The energy equation is written:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

With h_L is the linear pressure loss if the pipe is horizontal and the section is constant:

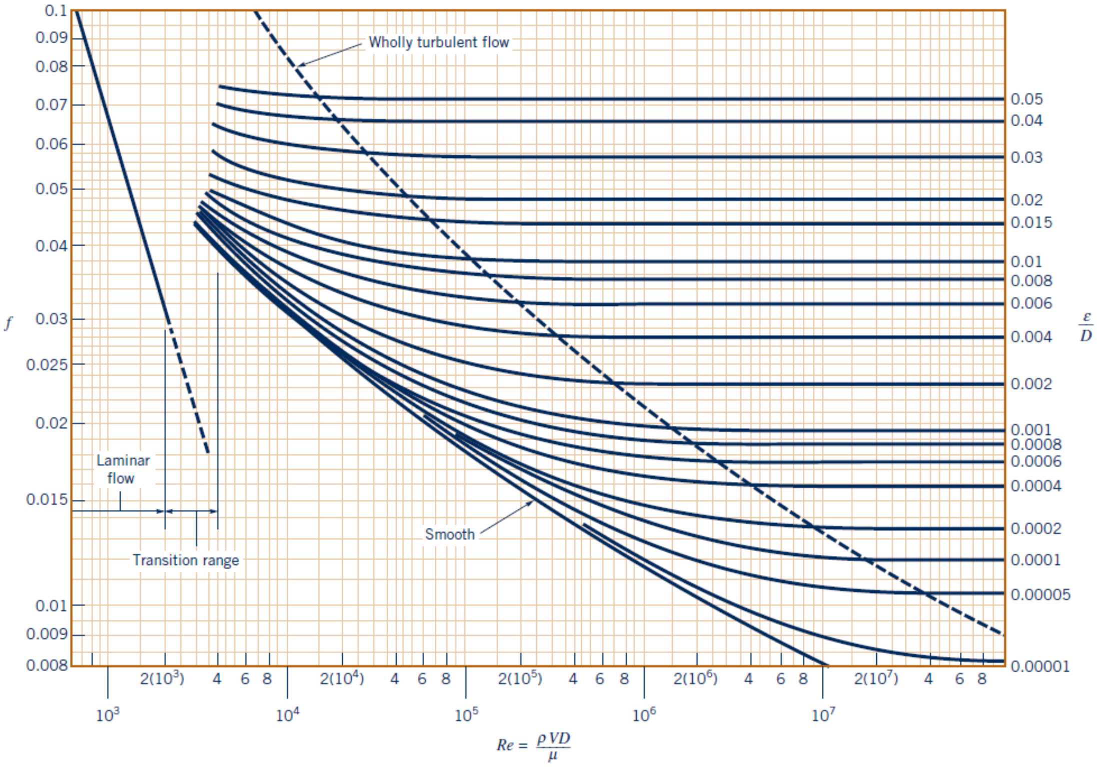
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h_L \quad \text{with} \quad h_L = f \frac{l}{D} \frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

Which gives $$p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1) + \rho g h_L = \rho g (z_2 - z_1) + f \frac{l}{D} \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$$

The dependence of *f* on *Re* and *ε/D* is plotted on a so-called MOODY diagram where *f* is given as a function of *Re* and relative roughness *ε/D*.

These maps do not give the coefficient with high accuracy, as an error of 10 percent is considered acceptable. To reduce the error, the coefficient of friction can be found by calculation using some expressions resulting from the experiment, such as the Colebrook equation, which is used in the case of turbulent flow, which is written:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \cdot log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{f}}\right)$$



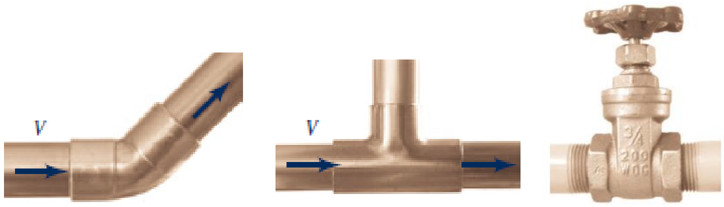
Moody Diagram

It is noted that this expression requires applying a numerical method to solve it because f is given in terms of f. There is a more straightforward expression than Colebrook's expression, called the Haaland equation, which enables the calculation of the coefficient of friction for turbulent flow directly, which is:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \cdot log\left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{R_e}\right]$$

7. Minor pressure losses

They are present when the fluid passes through the valves, elbows, tees, etc. The pressure loss in these organs is noted by h_{Lmin}.



To determine this pressure loss we specify a singular loss coefficient K_L, which is defined by :

$$K_L = \frac{h_{Lmin}}{\frac{v^2}{2g}} = \frac{\Delta p}{\rho \frac{v^2}{2}}$$

Such as $\Delta p = K_L \rho \frac{v^2}{2}$ or $h_{Lmin} = K_L \frac{v^2}{2g}$

In general, K_L depends on geometry and velocity; sometimes, minor losses are given

in terms of an equivalent length, l_{eq}, then: $h_{Lmin} = K_L \frac{v^2}{2g} = f \frac{l_{eq}}{D} \frac{v^2}{2g}$.