الفصل الثامن: الاستقرارية والارتباط الذاتي والجزئي.

دالة الارتباط الذاتي الجزئي PACF

دالة الارتباط الذاتي الجزئي تقيس الارتباط بين السلسلة Y_t ونفس السلسلة متأخرة فترة k أي Y_{t-k} بعد إزالة التأثير الناتج عن القيم التي بينهما $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})$ وترمز لهذه المعاملات بالرمز ϕ_{kk}

حيث يمكن أن نكتب:

لما $k=0$ فإن $\hat{\phi}_{k,k} = \hat{\phi}_{00} = 1$

لما $k=1$ $\hat{\phi}_{kk} = \hat{\phi}_{11} = r_1$

لما $k=2,3,\dots$ فإن $\phi_{kk} = r_{kk} = \dfrac{|P_k^*|}{|P_k|}$

$|P_k|$ قيمة محددة المصفوفة P_k وهي مصفوفة مربعة ذات البعد k.

حيث أن

$$|P_k| = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{k-2} \\ r_2 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ r_{k-2} & r_{k-3} & & r_1 & 1 \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & r_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_k^* = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{k-2} & r_1 \\ r_1 & 1 & & & & r_2 \\ r_2 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & r_{k-1} \\ r_{k-2} & & & & & r_k \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & r_1 & & \end{vmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

مثال

احسب قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي عند تأخير فترة $K=2$ ان عندي القيمة r_{22} من المثال السابق

من خلال دراسة دول الارتباط الذاتي لـ للمثال.

مشاهدات	١	٢	3	4	٥ 6
٪	12	١١	10	10	89

وجدنا أن

$r_1 = 0,4 \quad r_2 = 0 \quad r_3 = -0,2$

حسب معامل الارتباط الذاتي الجزئي

$$\hat{\phi}_{22} = r_{22} = \frac{|P_2^*|}{|P_2|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

بالتعويض عن

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{0 - 0,4^2}{1 - 0,4^2}$$

$$\hat{\phi}_{22} = -0,19$$

إذا اردنا حساب قيمة دالة الارتباط الجزئي عند تأخير فترة $K=3$ ان ايجاد قيمة r_{33}

$$\hat{\phi}_{33} = r_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1\begin{vmatrix} 1 & r_2 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix} - r_1 \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix} + r_1 \begin{vmatrix} r_1 & 1 \\ r_2 & r_1 \end{vmatrix}}{1\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix} - r_2 \begin{vmatrix} r_1 & r_1 \\ r_2 & 1 \end{vmatrix} + r_2 \begin{vmatrix} r_1 & 1 \\ r_2 & r_1 \end{vmatrix}}$$

Scanné avec CamScanner

$$= \frac{\lambda(r_3 - r_1 r_2) - r_1(r_1 r_3 - r_2^2) + r_1(r_1^2 - r_2)}{\lambda(1 - r_1^2) - r_2(r_1 - r_2 r_1) + r_2(r_1^2 - r_2)}$$

$$= \frac{r_1^3 - r_1 r_2(1 - r_2) + r_3(1 - r_1^2)}{1 - r_2^2 - 2r_1^2(1 - r_2)}$$

بالتعويض

$$= \frac{(0.4)^3 - 0.4 \cdot 0(2 - 0) + (-92)(1 - (0.4)^2)}{1 - 0^2 - 2(0.4)^2(1 - 0)}$$

$$\hat{\phi}_{33} = -0,15$$

طريقة دالة الارتباط الذاتي

- مجال الثقة -

في حالة العينات الكبيرة (أكثر من 30 مشاهدة)

فإن r_{kk} تتوزع طبيعياً تقريباً

$$r_{kk} \sim N\left(0 , Var(r_{kk})\right) \quad \text{حيث } Var(r_{kk}) = \frac{1}{n}$$

(3) ويكون مجال الثقة عند مستوى معنوية 5% هو

$$r_{kk} \in \left[\frac{-1,96}{\sqrt{n}} , \frac{1,96}{\sqrt{n}}\right]$$

إذا كانت r_{kk} تقع داخل المجال فإننا نقبل فرضية العدم والتي تنص على أن $\phi_{kk} = 0$ بمستوى معنوية 95%

Scanné avec CamScanner

مثال:

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
البيانات	71	49	54	62	58	64	46	67	53	49

اذا كانت معاملات الارتباط الذاتي

$r_1 = 0,539$ $r_2 = 0,275$ $r_3 = 0,011$ $r_4 = -0,074$ $r_5 = -0,24$ $r_6 = -0,262$ $r_7 = -0,099$

أحسب معاملات الارتباط الجزئية.

الحل:

$$\hat{\phi}_{11} = r_1 = 0,539$$

$$\hat{\phi}_{kr} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\, r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\, r_j}$$

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kr}\, \phi_{k-1,k-j} \qquad j = 1, 2 \ldots k-1$$

$$\phi_{11} = r_1 = 0,539$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{r_2 - \phi_{11} r_1}{1 - \phi_{11} r_1}$$

طريقة (Yule-Walker)

أستخدم الطريقة التالية لحساب قيم دالة الارتباط الذاتي الجزئي بدلالة دالة الارتباط الذاتي حتى قيمة k

$$\phi_{ii} = r_{ii} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{i-1} (r_{i-1,j} \times r_{i-j})}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} (r_{i-1,j} \times r_j)}$$

$i = 2, 3 \ldots k$

$r_{ij} = r_{i-1,j} = r_{ii}\, r_{i-1,i-j}$

$j = 1, 2, \ldots i-1$

$r_{i,i} = r_{ii}$

Scanné avec CamScanner

$$\phi_{22} = \frac{0,275 - 0,539^2}{1 - 0,539^2} = \phi_{11} = -0,0228$$ (5)

$$\phi_{21} = \phi_{11} - \hat{\phi}_{22}\phi_{11} \Rightarrow 0,539 - (-0,0228 * 0,539)$$

$$\phi_{21} = 0,0551$$

$$\phi_{33} = \frac{r_3 (\phi_{21} r_2 + \hat{\phi}_{22} r_1)}{1 - (\phi_{21} r_1 + \hat{\phi}_{22} r_2)}$$

$$\phi_{31} = \phi_{21} - \hat{\phi}_{33}\hat{\phi}_{22}$$

$$\phi_{32} = \hat{\phi}_{22} - \hat{\phi}_{33}\phi_{21}$$

وهيذا مكمل حساب طرق المعاملات

Scanné avec CamScanner