محاضرة رقم 06 : دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي والجزئي.

أولا: دالة الارتباط الذاتي FAC "في بيانات واقعية"

هي الدالة التي تقيس الارتباط بين السلسلة Y_t ونفس السلسلة متأخرة فترة k أي Y_{t-k} ونرمز لها بالرمز ρ_k وتكتب

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$$

حيث $Var(Y_t) = \gamma_0$ و $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_k$

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t ; Y_{t-k})}{\sigma Y_t \times \sigma Y_{t-k}}$$

وعليه نستخدم مقدرة دالة الارتباط الذاتي وهي:

$$r_k = \hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y})^2}$$

(4) مثال:

احسب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخيرات قدرها $K=1$ ، $K=2$ ، $K=3$ أي r_1, r_2, r_3 للسلسلة التالية:

t	1	2	3	4	5	6
Y_t	12	11	10	10	8	9

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير $k=1$ أي r_1

$$\bar{Y} = 10$$

t	Y_t	Y_{t-1}	① $Y_t - \bar{Y}$	② $Y_{t-1} - \bar{Y}$	①×②	$(Y_t - \bar{Y})^2$
1	12	-	2	-	-	4
2	11	12	1	2	2	1
3	10	11	0	1	0	0
4	10	10	0	0	0	0
5	8	10	-2	0	0	4
6	9	8	-1	-2	2	1
مجموع					4	10

$$r_1 = \hat{\rho}_1 = \frac{4}{10} \Rightarrow r_1 = 0,4$$

Scanné avec CamScanner

(5) حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير $k=2$ أي r_2

t	Y_t	Y_{t-2}	① $Y_t-\bar{Y}$	② $Y_{t-2}-\bar{Y}$	①×②
1	12	-	2	-	-
2	11	-	1	-	-
3	10	12	0	2	0
4	10	11	0	1	0
5	8	10	-2	0	0
6	9	10	-1	0	0
مجموع					0

$$r_2 = \hat{P}_2 = \frac{0}{10} = 0$$

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير $k=3$ أي r_3

	Y_t	Y_{t-3}	① $Y_t-\bar{Y}$	② $Y_{t-3}-\bar{Y}$	
1	12	-	2	-	-
2	11	-	1	-	-
3	10	-	0	-	-
4	10	12	0	2	0
5	8	11	-2	1	-2
6	9	10	-1	0	0
مجموع					-2

$$r_3 = \hat{P}_3 = \frac{-2}{10} \Rightarrow r_3 = -0,2$$

خواص دالة الارتباط الذاتي:

أ- دالة الارتباط الذاتي متناظرة حول الصفر $P_k = P(-k)$

ب- دالة الارتباط الذاتي محصورة بين 1 و -1

$$-1 \leq P_k \leq 1$$

Scanné avec CamScanner

ج. لما $k=0$ فإن $\rho_0=1$ ؛

$$\rho_0 = \frac{Cov(Y_t, Y_t)}{Var(Y_t)} \Rightarrow \rho_0 = \frac{Var(Y_t)}{Var(Y_t)} = 1$$

د- يسمى التمثيل البياني لسقيم دالة الارتباط الذاتي بـ "Corrélogramme" وتتراوح قيمه بين 1 و -1

هـ- تحديد قيمة التأخير k : إذا كان طول السلسلة المدروسة يقل عن 150 مشاهدة فإن قيمة التأخير تكون $\frac{n}{6} \leq k \leq \frac{n}{3}$ ، أما إذا كان طول السلسلة أكبر من 150 مشاهدة فإن قيمة التأخير تكون $k = \frac{n}{5}$

عملياً : إذا كانت المعطيات شهرية أو فصلية فنأخذ $k=24$ من أجل ملاحظة كل التغيرات الشهرية والفصلية.

أما إذا كانت المعطيات يومية فنأخذ قيمة التأخير

$$30 \leq k \leq 36$$

أما في حالة المعطيات السنوية فنأخذ $k \leq 15$

⑥ تحليل دالة الارتباط الذاتي

تسمح دالة الارتباط الذاتي (FAC) دورا كبيرا في تحليل مركبات السلسلة الزمنية ودراسة مدى استقراريتها

* مجال الثقة

** في حالة العينات الكبيرة (عدد المشاهدات يفوق 30 مشاهدة) فإن r_h معاملات الارتباط تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط معدوم وتكتب

$$r_h \rightsquigarrow N(0, Var(r_h))$$

$$Var(r_h) = \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{h} k_i^2\right)$$

ويكون مجال الثقة بمستوى معنوية 5% هو

$$r_h \in \left[-1{,}96\sqrt{Var(r_h)}\ ,\ 1{,}96\sqrt{Var r_h}\right]$$

فإذا كانت r_h تقع داخل مجال الثقة فإنها تتوافق

Scanné avec CamScanner

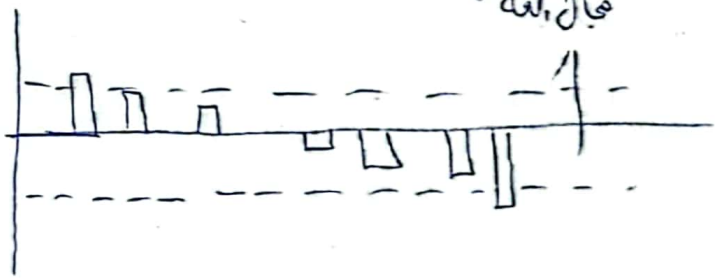
اننا نقبل الفرض الصفري الذي ينص بـ $\rho_k = 0$ يسوى معنوية كل (لا يوجد ارتباط ذاتي معاملات الارتباط معدومة)

اي اما تكون كل معاملات الارتباط تقع داخل مجال الثقة وهي احصائيا معدومة

وهنه يمكننا القول أن السلسلة لا تحتوي على مركبة الفصلية وبالتالي هي مستقرة

وتقريبا تقع داخل المجال

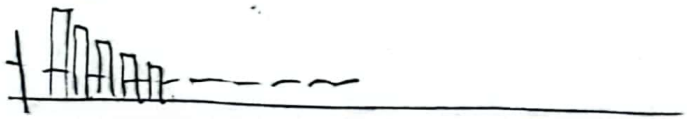
$$r_k \in \left[-1.96/\sqrt{n} \;,\; 1.96/\sqrt{n} \right]$$



* → في حالة دراسة سلسلة ذات مساهمات مقرونة ولاحظنا أن r_4 أو r_{12} معنوية تختلف عن الصفر أي أنها تقع خارج مجال الثقة - يمكننا القول أن السلسلة تتضمن المركبة الفصلية -

* → في حالة دراسة سلسلة ذات مساهمات ربع سنوية ولاحظنا أن r_{12} ، r_8 ، r_4 معنوية تختلف عن الصفر أي أنها تقع خارج مجال الثقة - يمكننا القول أن السلسلة تتضمن المركبة الفصلية -

* → في حالة دراسة ~~سلسلة~~ إذا لاحظنا أن قيم دالة الارتباط الذاتي r_k تقع خارج مجال الثقة - أي انها ذات معنوية احصائية تختلف عن الصفر غير أنها تتناقص بخطوة مع ارتفاع قيم k فإن هذا يوحي بوجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة المدروسة وأن السلسلة غير مستقرة -



Scanné avec CamScanner

⑧ مثال لحيه دالة الارتباط الذاتي للعمليات العشوائية المستقلة

① $Y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

هو ما سبق وحدثنا

$\gamma_0 = Var(Y_t) = 2\sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k}) \begin{cases} -\sigma_\varepsilon^2 & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases}$

$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \begin{cases} -0.5 & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases}$

حيث هذا

② $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad X_0 = 0$

كما وجدنا سابقا أن

$\gamma_0 = Var(X_t) = t\sigma_\varepsilon^2$

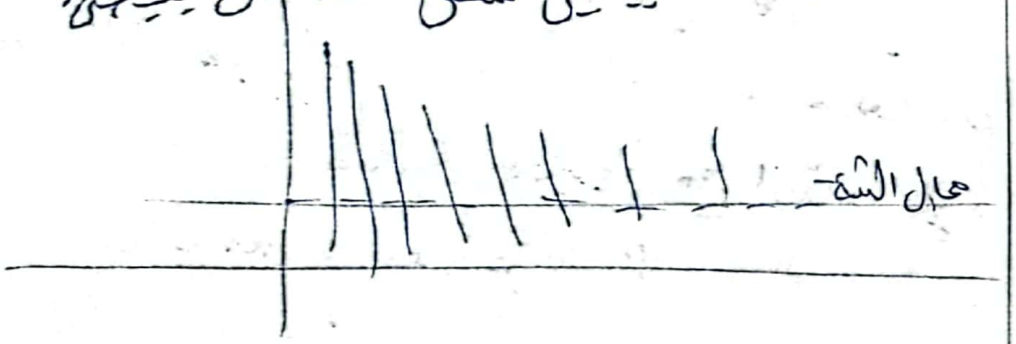
$\gamma_k = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$

$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(t-k)\sigma_\varepsilon^2}{t\sigma_\varepsilon^2}$

$\rho_k = 1 - \frac{k}{t}$

سنعطي حالة السابقة الذكر

اي حالة ارتباط ذاتي عن مستوى متتالية يساوي



Scanné avec CamScanner

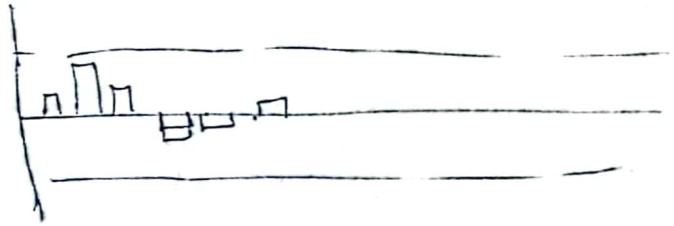
كل قيم دالة الارتباط الذاتي من أجل تأخيرات غير معدومة للضجة البيضاء تقع داخل مجال الثقة أي آتها ذات معنوية احصائية معدومة.

مثال

بالنسبة لدالة الارتباط الذاتي في الضجة البيضاء في حالة التسوسيق الابيض فإن التباين المشترك معدوم أي $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$ وتكون دالة الارتباط الذاتي في هذه الحالة كما يلي: (AC)

$$\rho_k = \begin{cases} \sigma^2/\sigma^2 & \text{إذا } k=0 \\ \dfrac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{\sigma_{Y_t} \times \sigma_{Y_{t-k}}} & \text{إذا } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & Si \quad k=0 \\ 0 & Si \quad k \neq 0 \end{cases}$$



Scanné avec CamScanner