Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi

Département Mathématiques et Informatiques

3$^{\text{ième}}$ année licence SI **Module : Probabilités Statistique**

Série N°05 : Vecteurs gaussiens

Exercice 01 :

Soient X, Y, Z trois variables gaussiennes centrées de variance $\sigma_X^2 = 3^2$, $\sigma_Y^2 = 2^2$, et $\sigma_Z = 1$ respectivement. On sait que :

$$Cov(X,Y) = -1 \quad , \quad Cov(X,Z) = -3 \quad , \quad E(YZ) = 2$$

1. Que peut-on dire de la loi de Z ?
2. Calculer $\rho(X,Y)$, $Cov(Y,Z)$, $Cov(2X+1, X+Y)$, $Cov(2X+1, Y-Z)$.
3. On suppose que Y indépendant de Z. Calculer le coefficient de corrélation de $2X+1$ et $Y-Z$.

Exercice 02 :

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien de moyenne $\mu_X = (3\ 0\ 10)^t$ et de matrice de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_1, X_2, et X_3.
2. Calculer $\rho(X_1, X_2)$, $\rho(X_1, X_3)$ et $\rho(X_2, X_3)$.
3. Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?
4. déterminer la loi de la variable $Y = X_1 + 2X_2 - X_3$? même question si $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

Exercice 03 :

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance :

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_1, X_2, et X_3.
2. Que peut-on dire de X_3 et de (X_1, X_2) ?
3. Quelle est la loi du vecteur $Y = (X_1, X_2)$?
4. On définit la variable aléatoire U comme suite :

$$\forall a \in \mathbb{R} \ , \quad U = X_2 + aX_1$$

   Quelle est la loi de la variable aléatoire U ?

5. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, le vecteur (X_2, U) est un vecteur gaussien.

6. Déterminer a de sorte que X_2 et U soient indépendantes.

Exercice 04 : Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires **indépendantes gaussiennes centrées réduites**. On définit les deux variables X et Y comme suite :

$$X = \frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}} \quad , \qquad Y = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{2}}$$

1. Quelle est la loi du vecteur $Z = (Z_1, Z_2)$?

2. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

3. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

4. Quelle est la loi de vecteur (X, Y) ?

5. Que peut-on dire de l'indépendance de X et Y ?