EMD en Résistance des Matériaux 2

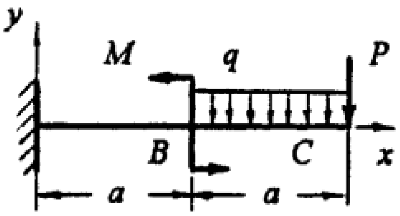
Déplacements des poutres symétriques en flexion plane

Corrigé Exercices Typiques

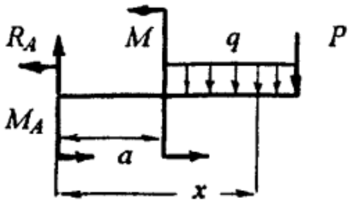
Exercice 2 TD2 :

Données : q, a P = qa, M = qa², EI_Z = Cte. — q, a, $P = qa$, $M = qa^2$, $EI_Z = Cte$.

Question : y_C et θ_B.



1. Détermination des réactions à l'encastrement.



$$\sum Y = 0 \qquad R_A = 2qa\,;$$

$$\sum M = 0 \qquad M_A = 2{,}5qa^2$$

2. L'origine des coordonnées se trouve à **l'encastrement** donc : les paramètres initiaux (flèche et rotation de la section droite à l'origine) **sont nuls** : $y_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$.
   L'équation universelle de la ligne élastique s'écrit :

$$EI_Z y(x) = R_A \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0\le x\le a} - M\frac{(x-a)^2}{2} - q\frac{(x-a)^4}{24}\Bigg|_{a\le x\le 2a} \quad \leftarrow \textbf{Equation des déplacements}$$

$$EI_Z \theta(x) = R_A \frac{x^2}{2} - M_A x\Big|_{0\le x\le a} - M(x-a) - q\frac{(x-a)^3}{6}\Bigg|_{a\le x\le 2a} \quad \leftarrow \textbf{Equation des rotations}$$

Le calcul des quantités inconnues y_C et θ_B. donne :

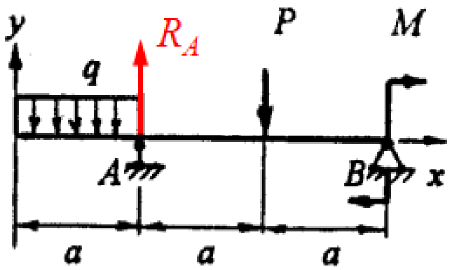
$$EI_Z\theta_B = EI_Z\theta(x=a) = qa^3(-2{,}5+1) = -\frac{3}{2}qa^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = -\frac{3qa^3}{2EI_Z}}$$

$$EI_Z y_C = EI_Z y(x=2a) = \frac{qa^3}{24}(64-120-12-1) = -\frac{23}{8}qa^4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_C = -\frac{23qa^4}{8EI_Z}}$$

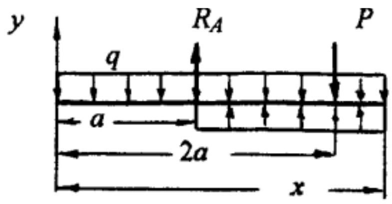
Exercice Supplémentaire :

Données : q, a $P = 4qa$, $M = qa^2$, $EI_Z = Cte$.

Question *:* Déterminer les équations universelles de la flèche permettant de calculer les déplacements et les rotations des sections droites de la poutre.



Pour le calcul des réactions aux appuis, on trouve *:* $R_A = \frac{11}{4}qa$



Pour une section arbitraire x, l'équation universelle de la ligne élastique de la partie droite de la poutre s'écrit :

$$EI_Z y = EI_Z y_0 + EI_Z\theta_0 x - q\frac{x^4}{24}\Bigg|_{0\le x\le a} + R_A\frac{(x-a)^3}{6} + q\frac{(x-a)^4}{24}\Bigg|_{a\le x\le 2a} - P\frac{(x-2a)^3}{6}\Bigg|_{2a\le x\le 3a}$$

Déplacements des poutres symétriques en flexion plane

Pour les rotations on écrit :

$$EI_Z y' = EI_Z\theta_0 - q\frac{x^3}{6}\bigg|_{0\le x\le a} + R_A\frac{(x-a)^2}{2} + q\frac{(x-a)^3}{6}\bigg|_{a\le x\le 2a} - P\frac{(x-2a)^2}{2}\bigg|_{2a\le x\le 3a}$$

Les paramètres initiaux y_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions de liaisons (conditions aux limites) de la poutre. Dans ce cas les déplacements verticaux sont nuls pour les appuis A et B.

$$\begin{cases} y_A = y(x=a) = 0 \\ y_B = y(x=3a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &EI_Z y_A = EI_Z y(x=a) = EI_Z y_0 + EI_Z\theta_0 a - \frac{qa^4}{24} = 0 \\ &EI_Z y_B = EI_Z y(x=3a) = EI_Z y_0 + EI_Z\theta_0 3a + \frac{7qa^4}{24} = 0 \end{aligned}$$

Résolution du système : $y_0 = \dfrac{5qa^4}{24EI_Z}$; $\theta_0 = -\dfrac{qa^3}{6EI_Z}$

Finalement, les équations universelles s'écrivent :

$$EI_Z y = \frac{5}{24}qa^4 - \frac{1}{6}qa^3x - \frac{1}{24}qx^4\bigg|_{0\le x\le a} + \frac{11}{24}qa(x-a)^3 + \frac{1}{24}q(x-a)^4\bigg|_{a\le x\le 2a} - \frac{2}{3}qa(x-2a)^3\bigg|_{2a\le x\le 3a}$$

$$EI_Z\theta = -\frac{1}{6}qa^3 - \frac{1}{6}qx^3\bigg|_{0\le x\le a} + \frac{11}{8}qa(x-a)^2 + \frac{1}{6}q(x-a)^3\bigg|_{a\le x\le 2a} - 2qa(x-2a)^2\bigg|_{2a\le x\le 3a}$$

Pour montrer la forme de la ligne élastique de la poutre, nous calculons des valeurs des flèches et des angles de rotation des sections suivantes :

- la rotation de la section située sur l'appui gauche A :

$$\theta_A = \theta\big|_{x=a} = \frac{1}{EI_Z}\left(-\frac{1}{6}qa^3 - \frac{1}{6}qa^3\right) = -\frac{qa^3}{3EI_Z}$$

- la rotation de la section située sur l'appui droit B :

$$\theta_B = \theta\big|_{x=3a} = \frac{qa^3}{EI_Z}\left(-\frac{1}{6} - \frac{27}{6} + \frac{44}{8} + \frac{8}{6} - 2\right) = \frac{qa^3}{6EI_Z}$$

- la flèche de la section sous la charge concentrée P :

$$y\big|_{x=2a} = \frac{qa^4}{EI_Z}\left(\frac{5}{24} - \frac{2}{6} - \frac{16}{24} + \frac{11}{24} + \frac{1}{24}\right) = -\frac{7qa^4}{24EI_Z}$$

La forme approximative de la déformée élastique de la poutre (la ligne en pointillés) avec les signes de flèches et des rotations calculées est donnée dans le schéma suivant :