probabilités

3.1 Expérience aléatoire et événement

3.1.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire (e.a) est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard.

Exemple 3.1. Le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure est une expérience aléatoire qui conduit à deux résultats possibles : Face (F) ou Pile (P).

Définition 3.1. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une e.a. est appelé **ensemble fondamental** et on le note généralement Ω.

Exemple 3.2. Lorsqu'on jette un dé (à six faces numérotées), si on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure, l'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3.1.2 Événement

Un événement de Ω est un sous ensemble de Ω. Un événement peut être élémentaire (un seul élément) ou composé (plusieurs éléments).

Exemple 3.3. Lorsqu'on jette un dé à six faces numérotées $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
l'événement A **:** "avoir le chiffre 2", est un événement élémentaire $A = \{2\} \subset \Omega$.
l'événement B **:** "avoir un chiffre pair", est un événement composé $B = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

3.2.2 Événement contraire

On appelle événement contraire de l'événement A le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, l'événement réalisé lorsque A n'est pas réalisé et vice versa.

Exemple 3.5. Si on prend l'événement B dans l'exemple précédent, "avoir un chiffre pair" $B = \{2, 4, 6\}$; alors son événement contraire $\overline{B}$ est "avoir un chiffre impair" $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$.

3.4 Définition classique des probabilités

A chaque événement A d'une expérience aléatoire (e.a.) est associé un nombre que l'on note $p(A)$ compris entre 0 et 1 qui mesure la probabilité de la réalisation de A. Si une e.a. a N cas possibles et parmi ces N cas, il y a n cas favorables à la réalisation de l'événement A, on définit la probabilité de la réalisation de A par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

D'une manière équivalente

$$p(A) = \frac{n}{N}.$$

Exemple 3.9. Dans le jet d'un dé à six faces équilibrées, soit A l'événement "avoir un nombre pair".
Nombre de cas possibles est 6 : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Nombre de cas favorables est 3 : $A = \{2, 4, 6\}$.

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{3}{6}.$$

Variables aléatoires

Définition 4.1. Une variable aléatoire X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, telle que que l'inverse de chaque intervalle de $\mathbb{R}$ est un événement de Ω.

On distingue deux types de variables aléatoires :

1. les variables aléatoires discrètes ;
2. les variables aléatoires continues.

4.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 4.2. Une variable aléatoire est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées (exemple : valeurs entières).

Exemple 4.1. En lançant un dé à six faces numérotées et en observant la face supérieure, l'ensemble fini des valeurs obtenues est : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

4.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies, c'est à dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Si l'on définit la probabilité $p(X = x_i) = p_i$ des valeurs x_i. Cette probabilité $p(X = x_i) = p_i$, est appelée la distribution ou la loi de probabilité de X, que l'on donne habituellement sous la forme du tableau suivant (tableau 4.1) :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_3)$	...	$p(X = x_n)$

TABLE 4.1 – La loi d'une variable aléatoire

La loi de probabilité satisfait les conditions :

$$0 \leq p(X = x_i) \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1.$$

Exemple 4.2. On jette une paire de dès bien équilibrés et on obtient l'ensemble fondamental Ω dont les éléments sont les 36 couples ordonnés des nombres allant de 1 à 6.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), ..., (6,5), (6,6)\}.$$

On suppose que la v.a. X est le maximum de point (a, b) de Ω, c'est-à-dire $X(a, b) = max(a, b)$; alors X sera définie par :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\begin{aligned}
p(X = 1) &= p(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}; \\
p(X = 2) &= p(\{(1,2), (2,1), (2,2)\}) = \frac{3}{36}; \\
p(X = 3) &= p(\{(1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}) = \frac{5}{36}; \\
p(X = 4) &= p(\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}) = \frac{7}{36};
\end{aligned}$$

de la même façon :

$$p(X = 5) = \frac{9}{36} \text{ et } p(X = 6) = \frac{11}{36}.$$

Cette information se résume dans le tableau 4.2.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

TABLE 4.2 – La distribution de la v.a. X.

Lois usuelles de probabilités

1 Loi de Bernoulli

Une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles (succès et échec) est appelée experience de Bernoulli.
Si A est l'événement succès et $\overline{A}$ est l'événement échec, on a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p,\ 0 \leq p \leq 1; \\ p(\overline{A}) &= 1-p=q,\ 0 \leq q \leq 1. \end{aligned}$$

On dit que X suit une loi de Bernoulli de probabilité p, et on note

$$X \rightsquigarrow \text{ Bernoulli}(p)$$

Espérance mathématique

La variable aléatoire X prend deux valeurs possibles $\{0;1\}$: 0 en cas d'échec et 1 en cas de réussite et son espérance mathématique est :

$$E(X)=p.$$

Variance

La variance de cette variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli(p) est :

$$V(X)=p.q$$

Écart type

L'écart type est

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p.q}.$$

La loi de Bernoulli(p) se résume dans le tableau 5.1 :

k	0	1		$E(X)=p$
$p(X=k)$	$p(X=0)=q$	$p(X=1)=p$		$V(X)=p.q$
	$0 \leq q \leq 1$	$0 \leq p \leq 1$		$\sigma(X)=\sqrt{p.q}$

TABLE 5.1 – Loi de Bernoulli(p).

Exemple 5.1. On jette un dé équilibré et on s'intéressera au résultat "avoir le chiffre 2".
A : "obtenir le chiffre 2 sur la surface supérieure du dé".

$$A=\{2\} \quad \text{et} \quad \overline{A}=\{1,3,4,5,6\};$$
$$p(A)=p=\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad p(\overline{A})=1-p=q=\frac{5}{6}.$$

$$\begin{aligned} \text{Le jet d'un dé} \quad & \text{est} \quad \text{une expérience de Bernoulli;} \\ \text{avec} \quad & p = \frac{1}{6} \text{ et } q = \frac{5}{6}; \\ & E(X) = p = \frac{1}{6}; \\ & V(X) = p.q = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}; \\ & \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q} = \frac{\sqrt{5}}{6}. \end{aligned}$$

.2 Loi binomiale

Soit une expérience de Bernoulli répétée n fois dans les mêmes conditions et de manières indépendantes (X_1, X_2, ... , X_n). La loi binomiale, notée $\mathcal{B}(n,p)$, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques (avec p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec).

La variable aléatoire X correspond au nombre de succès, si on a k succès on aura $(n-k)$ échecs et la probabilité d'avoir k succès dans une experience aléatoire répétée n fois, est :

$$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)},$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
Il est facile de démontrer que l'on a bien une loi de probabilité, car :

$$\sum_{k=0}^{n} p(X = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{(n-k)} = (p+q)^n = 1, \text{ car } p + q = 1.$$

Remarque 5.1. Le développement du binôme de Newton $(p+q)^n$ permet d'obtenir l'ensemble des probabilités pour une distribution binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec n et p des valeurs données.

Espérance mathématique

L'espérance mathématique de la distribution binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est :

$$E(X) = n.p$$

Variance

La variance de cette variable aléatoire qui suit une loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est :

$$V(X) = n.p.q$$

Écart type

L'écart type est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}.$$

La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ se résume dans le tableau 5.2 :

Réalisations	$k = 0, 1, 2, ..., n$		$E(X) = np$
Probabilité d'avoir k réussites	$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)}$		$V(X) = npq$
avec	$0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq q \leq 1$		$\sigma(X) = \sqrt{npq}$

TABLE 5.2 – Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 5.2. On reprend l'exemple du dé et on refait l'expérience du jet 5 fois (on jette le dé 5 fois). On s'intéressera au nombre de fois, où on obtient un 2.
A : "obtenir un 2 sur la surface supérieure du dé".

$p(A) = p = \frac{1}{6}$ et $p(\overline{A}) = q = 1 - p = \frac{5}{6}$.
X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p) = \beta(5, \frac{1}{6})$.

$$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)} = C_5^k.(\frac{1}{6})^k.(\frac{5}{6})^{(5-k)}.$$

1. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) deux fois le chiffre 2 ?
   (b) au moins trois fois le chiffre 2 ?
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution :

1. La probabilité d'obtenir :

   (a) deux fois le chiffre 2 est :

$$p(X = 2) = C_5^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{(5-2)} = 10 \times 0,028 \times 0,58 = 0,16.$$

   (b) au moins trois fois le chiffre 2 est :

$$\begin{aligned} p(X \geq 3) &= p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) \\ &= 1 - p(X < 3) \\ &= 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)] \\ &= 1 - [C_5^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{(5-0)} + C_5^1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{(5-1)} + C_5^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{(5-2)}] \\ &= 1 - [0,4 + 0,4 + 0,16] = 0,036. \end{aligned}$$

2. Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= np = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.\\
V(X) &= npq = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.\\
\sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

3 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de poisson (appelée aussi loi des événements rares ou de petits nombres) de paramètre réel λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si elle prend des valeurs entières dont les probabilités de réalisation sont :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ e = 2,718...$$

Paramètres de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

Espérance mathématique : $E(X) = \lambda$.
Variance : $V(X) = \lambda$.
Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Exemple 5.3. Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 300 appels par heure. Quelle est la probabilité que durant une minute, la centrale reçoit exactement deux appels ?
Solution :
Les appels dans cette centrale suivent une loi de poisson de paramètre $\lambda = \frac{300}{60} = 5$ appels par minutes en moyenne.

$$\begin{aligned}
p(X = 2) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-5}\frac{5^2}{2!}\\
&= 0,08422.
\end{aligned}$$

.2 Lois de probabilités continues

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable continue X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x).$$

La fonction F_X indique la probabilité que X soit strictement inférieure à tout x de l'intervalle de définition.

Remarque 4.3. Dans le cas d'**une variable aléatoire continue**, on a :

1. La probabilité attachée à un point x est nulle : $p(X = x) = 0$.
2. $p(X \leq x) = p(X < x) + p(X = x) = p(X < x)$.
3. La probabilité que la v.a. $X \in [a, b]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(a \leq X \leq b) &= p(a < X \leq b) \\ &= p(a \leq X < b) \\ &= p(a < X < b) \\ &= p(X < b) - p(X < a) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Loi Normale centrée réduite

Dans la pratique, on rencontre très souvent la loi normale. Afin d'éviter le calcul numérique de la fonction de répartition pour chaque application, on utilisera la loi normale centrée réduite, dont les valeurs existent et sont tablées.

Définition 5.1. Variable aléatoire centrée réduite

1. Une variable aléatoire centrée est une v.a. dont l'espérance est nulle $E(X) = 0$.
2. Une variable aléatoire réduite est une v.a. dont l'écart type $\sigma(X) = 1$ $(V(X) = 1)$.
3. La variable aléatoire $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une v.a. centrée réduite.
   En effet,

$$\begin{aligned} E(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}) &= \frac{1}{\sigma(X)}(E(X) - E(X)) = 0; \\ V(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}) &= \frac{1}{\sigma^2(X)}(V(X)) = \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2(X)} = 1. \end{aligned}$$

Théorème 5.2. *Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Si on applique le changement de variable $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ et le changement de bornes correspondantes $z = \frac{x-m}{\sigma}$, on a :*

$$F_X(x) = p(X \leq x) = p(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}) = p(Z \leq z) = F_Z(z).$$

La variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

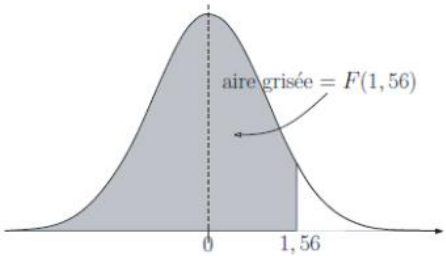
$$\text{Si } X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \text{ alors } Z = \frac{X - m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Exemple 5.6. On suppose qu'une certaine variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Pour quelle proportion d'individus on a $Z \leq 1,56$?
2. Pour quelle proportion d'individus on a $Z \geq 1,49$?
3. Calculer $p(Z \leq -1,1)$.

Solution

1. Calcul de $p(Z \leq 1,56)$:



La valeur de $p(Z \leq 1,56) = F(1,56)$ sera déduite à partir de la table de la loi normale centrée réduite ; pour cela on cherche 1,56 dans la table :
Donc $p(Z \leq 1,56) = 0,9406$.

	...	0.06	...
$\vdots$		$\vdots$	
1,5	...	0,9406	...
$\vdots$			

Pour 94,06% des individus, la variable aléatoire Z est inférieure à 1,56.

2. Calcul de $p(Z \geq 1,49)$:

$$\begin{aligned} p(Z \geq 1,49) &= 1 - p(Z \leq 1,49) \\ &= 1 - F(1,49). \end{aligned}$$

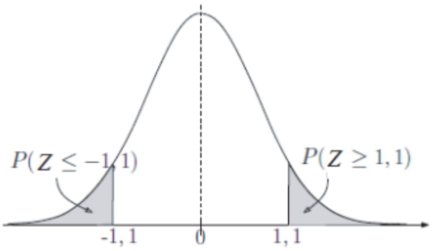
On cherche 1,49 dans la table :
Donc $p(Z \leq 1,49) = 0,9319$, alors $p(Z \geq 1,49) = 1 - 0,9319 = 0,0681$.

	...	...	0.09
$\vdots$			$\vdots$
1,4	...	...	0,9319
$\vdots$			

3. Si de plus on veut connaître $p(1,49 \leq Z \leq 1,56$, alors :

$$\begin{aligned} p(1,49 \leq Z \leq 1,56 &= F(1,56) - F(1,49) \\ &= 0,9406 - 0,9319 = 0,0087. \end{aligned}$$

4. On cherche $p(Z \leq -1.1)$, c'est-à-dire $F(-1,1)$.



On sait que $p(Z \leq -1.1) = F(-1,1) = 1 - F(1,1) = 1 - 0,8643 = 0,1357$.
Autrement dit, $p(Z \leq -1,1) = p(Z \geq 1,1) = 1 - 0,8643 = 0,1357$.

Exemple 5.7. Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale d'une moyenne $m = 2$ et d'un écart type $\sigma = 0,16$.
Quelle est la probabilité d'avoir $1,94 \leq X \leq 2,02$?
Solution

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(2; 0.16) \Rightarrow Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

$$\begin{aligned} p(1,94 \leq X \leq 2,02) &= p(\frac{1,94-2}{0,16} \leq Z \leq \frac{2,02-2}{0,16}) \\ &= p(-0,375 \leq Z \leq 0,125) \\ &= p(Z \leq 0,125) - p(Z \leq -0,375) \\ &= F_Z(0,125) - F_Z(-0,375) = F_Z(0,125) - [1 - F_Z(0,375)] \\ &= 0,5497 - [1 - 0,6462] = 0,1959. \end{aligned}$$

5.2.5 Table de la loi normale centrée réduite

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ et } F(-t) = 1 - F(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Utilisation : On lit les décimales dans les lignes et les centièmes en colonnes.
Par exemple, la valeur de $F(1.54)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.5 et de la colonne 0.04 et on trouve $F(1.54) = 0.9382$ à 10^{-4} près.