Chapitre 3

Introduction :

On considère désormais (sauf mention contraire) un PL toujours sous forme standard. Faisons à présent une hypothèse sur la matrice A.

Hypothèse de rang plein : on suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $rg(A) = m \leq n$.

Sous l'hypothèse de rang plein :

- le système $Ax = b$ admet toujours des solutions ;
- si $m < n$, le système $Ax = b$ admet une infinité de solutions ;
- si $m = n$, la matrice A est inversible. Dans ce cas, la solution du système linéaire est unique et vaut $x = A^{-1}b$ et il n'y a rien à maximiser.

Rem L'hypothèse de rang plein n'est pas restrictive car si $rg(A) < m$ et $b \in Im(A)$, il y a des eqns redondantes dans le système $Ax = b$, qu'on peut donc supprimer pour obtenir un nouveau système de rang plein.

3.1 Solution réalisable et solution optimale :

Soit P un PL de forme standard :

$$P : \begin{cases} \max z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Déf : On appelle solution réalisable (admissible) de P, un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie toutes les contraintes, c-à-d que x est tel que $Ax = b$ et $x \geq 0$.

L'ensemble $R = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = b,\ x \geq 0\}$ de toutes les solutions réalisables de P est appelé domaine réalisable de P.

Déf: Un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé solution optimale de P si c'est une solution réalisable et si $c^T x^* \geq c^T x$; pour toute solution réalisable x.

Déf: Une solution réalisable est dite de base s'il existe une partition $J = J_B \cup J_H$ t.q $x_H = X(J_H) = 0$ et $\det(A_B) \neq 0$, où $A_B = A(I, J_B)$. c-à-d :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_B^{-1} b \geq 0 .$$

Rem: La matrice A_B est appelée matrice de base ;
x_j $(j \in J_B)$ les composants de base ;
x_j $(j \in J_H)$ les composants hors base.
J_B l'ensemble des indices de base ; J_H l'ensemble des indices hors base.

Déf: Une solution de base x est dite non-dégénérée si $x_B > 0$, c-à-d $x_j > 0$; $j \in J_B$.

Ex. Soit le PL suivant : $\text{Max } z = -x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.c} \quad -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 &= 3 \\ x_i \geq 0 \; ; \; i &= \overline{1,5} . \end{aligned}$$

La fn. objective peut s'écrire comme $z = c^T x$, où $c^T = (-1, -1, 1, 0, 0)$ et les contraintes d'égalité peuvent s'écrire comme $Ax = b$, avec

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si l'on choisit une partition $J_B = \{1, 2\}$, A_B sera $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ qui correspond à $x_B^T = (x_1, x_2)$ et $A_H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ qui correspond à $x_H^T = (x_3, x_4, x_5)$, la solution est alors $x_B = A_B^{-1} b = (-1, 1)^T$, $x_H = (0,0,0)^T$

La solution basique est $x^T = (-1, 1, 0, 0, 0)$, ce qui n'est pas faisable puisque $x_1 = -1 < 0$.
Le choix de partition $J_B = \{3, 4\}$ donne une sln. de base réalisable $x^T = (0, 0, 3, 5, 0)$.

Thm. x^* est une solution de base réalisable si et seulement si x^* est un point extrême de R.

Rem. Il y a au plus C_n^m solutions de base (toutes ne sont pas réalisable).

Déf. • L'hypographe et l'épigraphe d'une fn. $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (est convexe), notés resp. hyp(f) et epi(f) sont définis comme :

$$hyp(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \;/\; f(x) \geq y\} ;$$
$$epi(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \;/\; f(x) \leq y\} .$$

Déf. • Une fn. $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est concave (resp. convexe) sur X si l'ensemble hyp(f) (resp. epi(f)) est convexe.

Thm. • Une fn. $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est concave (resp. convexe) sur X ssi Pour tout $x, y \in X$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

(resp. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$).

Rem. • f est concave ssi $-f$ est convexe.

Déf. Un problème d'optimisation convexe est un problème où toutes les contraintes sont des fns. convexes et l'objective est une fn. convexe en cas de minimisation, ou une fn. concave en cas de maximisation.

Rem Les fns. linéaires sont convexes, donc les problèmes de programme linéaire sont des problèmes convexes.

Thm. Un minimum local (resp. maximum) d'un problème convexe est également un minimum global (resp. maximum).

Rem Soit $R = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = b;\ x \geq 0\}$ l'ensemble des slns. réalisables d'un PL sous forme standard.

Rem L'ensemble R n'est pas nécessairement borné. En fait pour un PL, trois situations (et seulement trois) peuvent se produire :

(1) $R = \emptyset$: le LP n'a pas de solution.

(2) $R \neq \emptyset$ mais la fn. objective F n'est pas majorée sur R : le maximum de F vaut $+\infty$.

(3) $R \neq \emptyset$ mais la fn. objective F est majorée sur R : le PL admet une sln. optimale (non nécessairement unique).

Méthode du simplexe :

Introduction :

On a vu qu'il y a au plus C_n^m slns. de base réalisable (SBR).
Pour déterminer une SBR, on doit résoudre un système linéaire $x_B = A_B^{-1} b$. La résolution d'un système linéaire par une méthode directe est d'ordre $O(m^3)$ opérations. Si on explore toutes les SBR on effectue de l'ordre $O(m^3 C_n^m)$ opérations. Ce nombre est vite très grand avec n et m.
Dans la méthode du simplexe, on va explorer seulement les sommets qui permittent d'augmenter la fn. objective. donc on va réduire ainsi le nombre de SBR à explorer et donc le nombre de système linéaire à résoudre.

La méthode du simplexe est une technique puissante et largement utilisée pour résoudre des problèmes de PL complexes.
Elle permet de trouver la sln. optimale en se déplaçant de sommet en sommet dans la région faisable jusqu'à atteindre l'optimum.

Formule d'accroissement de la fn. objective :

Soit un problème de PL : $\begin{cases} \max Z = c^T x \\ \text{s.c} \quad Ax = b ; \\ \quad\quad x \geq 0 . \end{cases}$

$x \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
et soit la partition suivante : $J = J_B \cup J_H$; $A = [A_B | A_H]$;
$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_H \end{pmatrix}$.

Soit x une SBR et considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$, c-à-d $A\bar{x} = b$; $\bar{x} \geq 0$
l'accroissement de la fn. objective Z est donc égale à :

$$\Delta z = z(\bar{x}) - z(x) = c^T\bar{x} - c^T x = c^T(\bar{x} - x)$$
$$= c^T \Delta x \quad \cdots\cdots (1)$$

comme x et $\bar{x}$ sont réalisable alors $A\bar{x} = Ax = 0$

$\Rightarrow A(\bar{x} - x) = A\Delta x = 0$.

comme $\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_H \end{bmatrix}$, d'où $A\Delta x = A_B \Delta x_B + A_H \Delta x_H = 0$

$$\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \Delta x_H \quad \cdots\cdots (2)$$

et en vertu de la relation (1) on obtient :

$$\Delta z = c^T \Delta x = c_B^T \Delta x_B + c_H^T \Delta x_H = c_B^T(-A_B^{-1} A_H \Delta x_H) + c_H^T \Delta x_H$$

$$\Rightarrow \Delta z = -(c_B^T A_B^{-1} A_H - c_H^T)\Delta x$$

On a $L = A^T y - c$ (l'estimation) $\cdots\cdots (3)$

et $y = (A_B^{-1})^T c_B$ (le potentiel) $\cdots\cdots (4)$

donc $L^T = c_B^T A_B^{-1} A - c^T$, ainsi que $L_H^T = L(J_H) = c_B^T A_B^{-1} A_H - c_H^T$

où L_H est le vecteur des coûts réduits.

Rem. On a $L_B = L(J_B) = c_B^T A_B^{-1} A_B - c_B^T = 0 \quad \cdots\cdots (5)$

En utilisant (3) et (4) l'accroissement $\Delta z = -L_H^T \Delta x_H$

comme $\bar{x} \geq 0$ et $x_H = 0$, donc $\bar{x}_H = x_H + \Delta x_H = \Delta x_H \geq 0$

En utilisant cette dernière inégalité et la relation (5), on déduit le critère d'optimalité

Thm: (Critère d'optimalité)

Soit $\{x, A_B\}$ une SBR de départ. L'inégalité $L_H \geq 0$ est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité de $\{x, A_B\}$.

Preuve: condition suffisante: Soit x une SBR, telle que $L_H \geq 0$, et considérons une autre solution réalisable quelconque : $\bar{x} = x + \Delta x$

Comme $\bar{x} = x + \Delta x \geq 0$, donc $\bar{x}_H = x_H + \Delta x_H \geq 0$ et x est basique c-à-d $x_H = 0$, donc $\Delta x_H \geq 0$ et en utilisant l'hypothèse $L_H \geq 0$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\Delta z = c^T \Delta x = -L_H^T \Delta x_H \leq 0$$

$\Rightarrow c^T \bar{x} \leq c^T x$, $\forall \bar{x}$ solution réalisable, et ceci montre que x est une sln. optimale.

Condition nécessaire: Faisons la preuve par absurde :

Soit $\{x, A_B\}$ une SBR optimale non dégénérée, et supposons que l'inégalité $L_H \geq 0$ n'est pas vérifiée, c-à-d, $\exists j_0 \in J_H$, tel que $(L_H)_{j_0} < 0$

Construisons la sln. réalisable $\bar{x} = x + \Delta x$, où Δx est l'accroissement de x. Pour cela posons :

$$\Delta x_j = \begin{cases} 0 \; ; \; j \in J_H \setminus \{j_0\} \; ; \\ \theta \; ; \; j = j_0 \; ; \quad \text{avec } \theta \geq 0 . \end{cases} \quad \cdots \text{(1)}$$

de l'admissibilité de $\bar{x}$ c-à-d $A\bar{x} = b$, on calcule :

$$\Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \Delta x_H = -\theta A_B^{-1} A_{j_0} \qquad (A_{j_0} \text{ la colonne } j_0 \text{ de } A)$$

Maintenant, vérifions l'admissibilité de $\bar{x}$ par rapport à la contrainte directe $(\bar{x} \geq 0)$?!

on a : $\bar{x}_H = x_H + \Delta x_H = \Delta x_H$, ici $\bar{x}_H \geq 0$, car de la relation (1) on a $\Delta x_H = 0$ partout sauf pour $j = j_0$ et $\theta \geq 0$.

et puisque x est non dégénérée on a $x_B > 0$, donc $\bar{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1} A_j \geq 0$ pour θ suffisamment petit. De là $\bar{x}$ est une solution réalisable.

En utilisant l'accroissement de z, on obtient :

$\Delta z = z(\bar{x}) - z(x) = c^T \Delta x = -\theta L_{j_0} > 0$, ce qui implique $c^T \bar{x} > c^T x$ et ceci contredit l'optimalité de x.

Rm. si les composantes du vecteur $A_B^{-1} A_{j_0}$ sont non positives, alors le problème de départ possède une solution infinie.
<u>En effet:</u> en construisant $\bar{x}$ admissible, il faut avoir
$\bar{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1} A_{j_0}$.

Comme $x_B > 0$ et si $A_B^{-1} A_{j_0} \leq 0$, alors $\bar{x}_B \geq 0$ pour tout valeur de θ, ce qui implique que $\bar{x}$ est une solution admissible
De là en tendant θ vers l'infini, on obtient :

$$Z(\bar{x}) = c^T x + c^T \Delta x = c^T x - \theta L_{j_0} \longrightarrow +\infty .$$

Itération de l'algorithme du simplexe:

Soit $\{x, A_B\}$ une SBR de départ et supposons que le critère d'optimalité n'est pas vérifié, c'est-à-dire l'inégalité $L_H \geq 0$, n'est pas vérifiée.
Choisissons l'indice $j_0 \in J_H$ / $L_{j_0} = \min\limits_{L_j < 0, j \in J} \{ L_j \}$.

Le but de l'itération est de faire rentrer cet indice j_0 dans la base (autrement dit la colonne A_{j_0} va rentrer dans la base).

Donc il faut trouver un indice $j_1 \in J_B$, qui sortira de la base (à cet indice correspond la colonne $A_{j_1} \in A_B$). Et ceci constitue l'itération, qui procède au passage de la SBR (pt. extrême) $\{x, A_B\}$ à la SBR $\{\bar{x}, A_{\bar{B}}\}$ (sommet voisin) et tel que $Z(\bar{x}) > Z(x)$.

La nouvelle SBR $\bar{x}$ sera trouvée de la manière suivante:

$\bar{x} = x + \theta d$, où d est la direction du changement de x et θ le pas le long de cette direction.

Construisons la direction d de la manière suivante :

sur J_H, posons : $d_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in J_H \setminus \{j_0\} \\ 1 & \text{si } j = j_0 \end{cases}$

sur J_B : $\bar{x}$ doit être réalisable, donc elle doit vérifier $A\bar{x} = b$ et comme $Ax = b$, on a donc $\theta A d = 0$, c-à-d, $Ad = 0$

de cette dernière relation on obtient :

$$d_B = d(J_B) = -A_B^{-1} A_H d_H .$$

de là $\bar{x}_H = x_H + \theta d_H = \theta d_H \geq 0$ et $\bar{x}_B = x_B + \theta d_B \Rightarrow \bar{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1} A_{j_0}$

si les composantes du vecteur $A_B^{-1} A_{j_0} \leq 0$, alors $\bar{x}_B \geq 0$, $\forall \theta \geq$, donc on peut prendre $\theta \to \infty$ et on aura une sln. infinie.

Si parmi les composantes du vecteur $A_B^{-1} A_{j_0}$, ils existent celles qui sont négatives, donc en augmentant θ certaines composantes de $\bar{x}_B$ seront négatives.

Pour avoir $\bar{x}_B \geq 0$, il faut prendre un pas maximal θ_{j_1} :

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \{\theta_j\} = \min \left\{ \frac{x_j}{\mu_{j_0 j}} \,/\, \mu_{j_0 j} > 0 ,\ j \in J_B \right\}$$

où $j_1 \in J_B$, $\mu_{j_0 j}$ est la $j^{\text{ème}}$ composante de $A_B^{-1} A_{j_0}$.

La nouvelle base sera : $\bar{J}_B = J_B \setminus \{j_0\} \cup \{j_1\}$.

Organigramme de l'algorithme du simplexe :

Soit $\{x, A_B\}$ une SBR

Calculer $y^T = C_B^T A_B^{-1}$ et $L_H = y^T A_H - C_H$

si $L_H \geq 0$ — oui → stop, x est une SBR optimale

Non

Soit $j_0 \in J_H$: $L_{j_0} = \underset{L_j < 0,\, j \in J_H}{\text{Min}} \{ L_j \}$

si $\mu_{j_0} = A_B^{-1} A_{j_0} \leq 0$ — oui → Stop, le maximum de la fn. objective tend vers l'infini

Non

Déterminer j_1 :

$\theta_{j_1} = \text{Min} \left\{ \dfrac{x_j}{\mu_{j_0 j}} \,/\, \mu_{j_0 j} > 0,\ j \in J_B \right\}$

Calculer $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_H \end{bmatrix}$

$\bar{x}_B = x_B - \theta \mu_{j_0}$, $\bar{x}_j = 0$ si $j \in J_H \setminus \{j_0\}$

$\bar{x}_{j_0} = \theta_{j_1}$

Poser $J_{\bar{B}} = J_B \setminus \{j_1\} \cup \{j_0\}$, $J_{\bar{H}} = J_H \setminus \{j_0\} \cup \{j_1\}$

$A_{\bar{B}} = A(I, J_{\bar{B}})$, d'où $\{\bar{x}, A_{\bar{B}}\}$ la nouvelle SBR