Déf : Soit C un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et $F \subset C$ convexe fermé lui aussi. On dit que F est une face de C si quels que soient $x_1, x_2 \in C$ et $\lambda \in (0,1)$; si $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F$ alors nécessairement $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$.

Thm. (Krein-Milman) : tout convexe compact non vide d'un e.v normé est enveloppe convexe de ses pts. extrémaux.

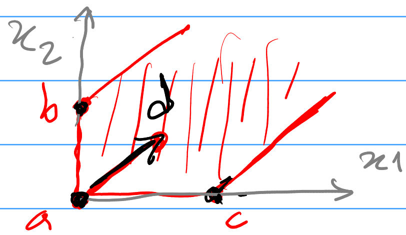
Déf Soit A un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, un vecteur $d \in A$ $(\neq 0)$ est appelé direction de A si $\forall x_0 \in A$, le rayon $\mathcal{S}_{x_0}$ est inclus dans A.

Déf : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide. Un pt. $d \in A$ $(\neq 0)$ est appelé direction extrême de A s'il ne peut être combinaison conique de deux direction distinctes, c-à-d

$$\left(d = \lambda d_1 + \mu d_2 \text{ avec } d_1, d_2 \text{ deux directions de } A ;\ \lambda, \mu > 0 \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(d_1, d_2 \text{ sont colinéaires.} \right)$$



Points et dir. extrêmes

Prop. Soit $F = \{ x_0 + \lambda a \ / \ \lambda \geq 0 \}$ une demi-droite, où $x_0, a \in \mathbb{R}^n$ si F est une face d'un convexe A, alors a est une direction extrémale de A

Ex. Considérons le cône convexe $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq |x| \}$

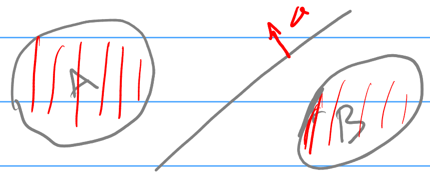
- Montrer que $d = (1,1)$ est une direction extrême de A.

Ex Soit $A = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 - x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \geq 0$

- Montrer que $d = (1,1)$ est une direction extrême de A.

• Séparation et convexe : On rappelle qu'un hyperplan $H \subset \mathbb{R}^n$ détermine deux demi-espaces fermés que nous avons notés H_+ et H_-.

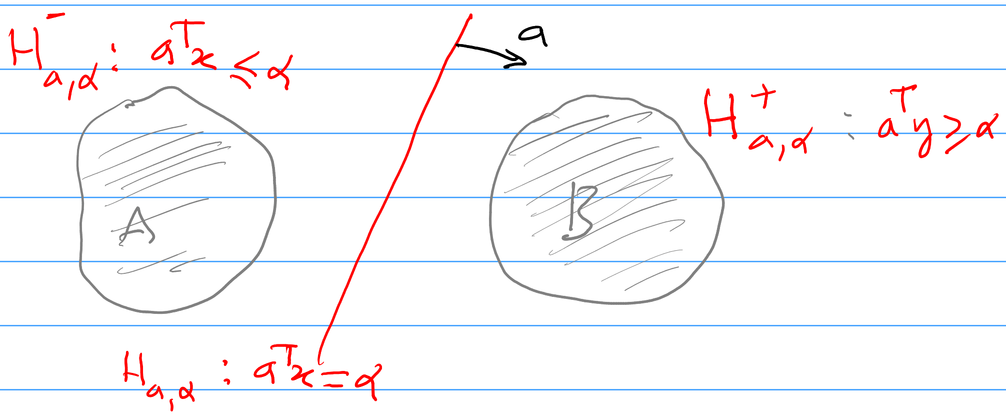
Déf : On dit que l'hyperplan H sépare A et B (deux ensembles de $\mathbb{R}^n$) au sens large si $A \subset H^+$ et $B \subset H^-$, ou inversement.
On dit que l'hyperplan $H = H_{a,r}$ sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \subset H^-_{a,r-\varepsilon}$ et $B \subset H^+_{a,r+\varepsilon}$ ou inversement.



$H_{a,r} = \{ax = r\}$

Déf Soit A un convexe non vide d'un e.v. E. On dit qu'un hyperplan affine H ~~est~~ un hyperplan d'appui à A en $x^* \in A$ si $x^* \in H$ et A est contenu dans l'un des demi-espaces délimités par H.

Thm Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie, A et B deux convexe de E non vides et disjoints. Alors il existe un hyperplan séparant A et B, i.e., $\exists$ une forme linéaire non et $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q : $\forall x \in A, \forall y \in B$; $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$



* Lemme de Farkas (version matricielle):

Soient $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors un et un seul des systèmes linéaires suivants a une solution:

- $Ax = b$ et $x \geq 0$; ($x \geq 0$ signifie que toutes les composantes du vecteur x sont non négatives)
- $A^T y \geq 0$ et $b^T y < 0$.

* Lemme de Farkas (version vectorielle):

Soient $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, et $b \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a_i^T x \leq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, bx \leq 0\}$$

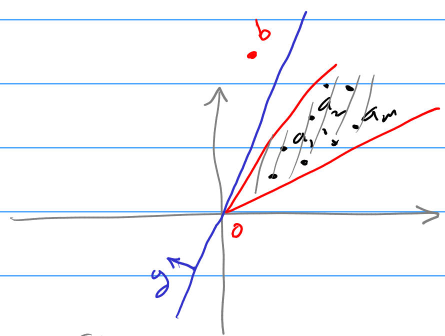
si et seulement si $b \in \text{cone}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Rem: Le lemme de Farkas en dimension finie généralise la relation d'algèbre linéaire reliant l'image d'une application linéaire A entre deux espaces euclidiens et le noyau de A^*, à savoir

$$Im(A) = Ker(A^*)^{\perp}. \quad / \quad (A^* = \bar{A}^T)$$

Connu sous le nom de théorème de Fredholm alternatif en algèbre linéaire.

Rem: L'interprétation géométrique du lemme de Farkas est alors suivante: Soient $a_1, a_2, \dots, a_m$ les colonne de A et soit $\text{cone}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ l'enveloppe conique de $(a_i)_{i=\overline{1,m}}$, si $b \notin \text{conv}(a_1, a_2, \dots, a_m)$, alors on peut le séparer du cône par un hyperplan:



Interprétation géométrique du lemme de Farkas

2.3 Formes d'un programme linéaire :

- **Matrices et vecteurs partitionnés :**

On peut effectuer le produit d'une matrice A et d'un vecteur x, après les avoir partitionnées, on dit alors qu'on a effectué le produit par bloc.

En effet :

si $A = [A_1 | A_2]$, $x = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ alors on aura :

$$Ax = [A_1 | A_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2.$$

on peut aussi partitionner A de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \end{bmatrix}$$

et l'eqn. $Ax = b$ devient :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Rem : on peut partitionner une matrice d'une façon arbitraire.

Ex. Soit $A = A(I,J) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = x(J) = (-5, 1, 0, 3, -2)^T$

effectuons par blocs le produit Ax avec la partition suivante :

$J = J_B \cup J_H$, $J_B = \{2, 5\}$, $J_H = \{1, 3, 4\}$

On a

$$A_B = A(I, J_B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_H = A(I, J_H) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = x(J_B) = (1, -2)^T \text{ et } x_H = x(J_H) = (-5, 0, 3)^T$$

d'où

$$Ax = A_B x_B + A_H x_H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

• Les formes canoniques et standards :

Déf: Le PL

$$\begin{cases} \max Z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ \text{Sous les contraintes:} \\ \qquad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \text{et } x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

est dit de forme canonique. Il est caractérisé par :

- une fonction objectif à maximiser.
- toutes les contraintes sont des inégalités linéaires du type $\leq$.
- toutes les variables sont astreintes à la non négativité.

Sous forme condensée, un PL de forme canonique s'écrit :

$$\begin{cases} \max Z = c^T x \\ \text{s.c} \quad Ax \leq b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{cases}$$

Prop: Tout PL peut être mis sous forme canonique.

Déf: Un PL est de forme standard s'il se présente ainsi :

$$\begin{aligned} &\max z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ &\text{s.c} \quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ &\qquad\quad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ &\text{et } x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Sous forme condensée, un PL de forme standard s'écrit :

$$\max z = c^T x$$
$$\text{s.c} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Rem: Les formes canonique et standard peuvent varier selon les auteurs.

Prop: Tout PL peut être mis sous forme standard.

Caractérisation des pts. extrêmes :

Considérons un PL suivant :

$$P : \begin{cases} \max z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Désignons par $R = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Ax = b, x \geq 0\}$ l'ensemble des solution admissibles du P.

Thm: L'ensemble R est convexe fermé.

Thm: Soit $x^* \in R$ un pt. extrême, alors les vecteurs colonnes de A correspondants aux composantes positives de x sont linéairement indépendant.

Thm: Si le système de vecteurs colonnes de A possède m vecteurs linéairement indépendants (par exemple $a_1, a_2, \dots, a_m$) alors les slns. admissibles $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ est un point extrême.

Conséquence:

Le nombre de points extrêmes est fini.

Thm: La fonction objective $z = c^T x$ du problème P atteint son maximum en un pt. extrême de R.

Si le maximum est atteint sur deux pts. extrême x_1 et x_2, alors tous les pts. du Segment $[x_1, x_2]$ sont des solutions optimales.

Conséquence :

Le maximum d'un fn. linéaire est atteint toujours sur un ou plusieurs pts. extrêmes.

• Résolution Graphique :

Il y a en effet plusieurs méthodes pour résoudre les problèmes de PL Chaque méthode a ses propres avantages et limites, et le choix de la méthode dépend souvent de la complexité du problème et du nombre de variables impliquées.

Voici un aperçu de quelques méthodes :

① Méthode Algébrique.

② Méthode Graphique.

③ Méthode du simplexe et ses variantes.

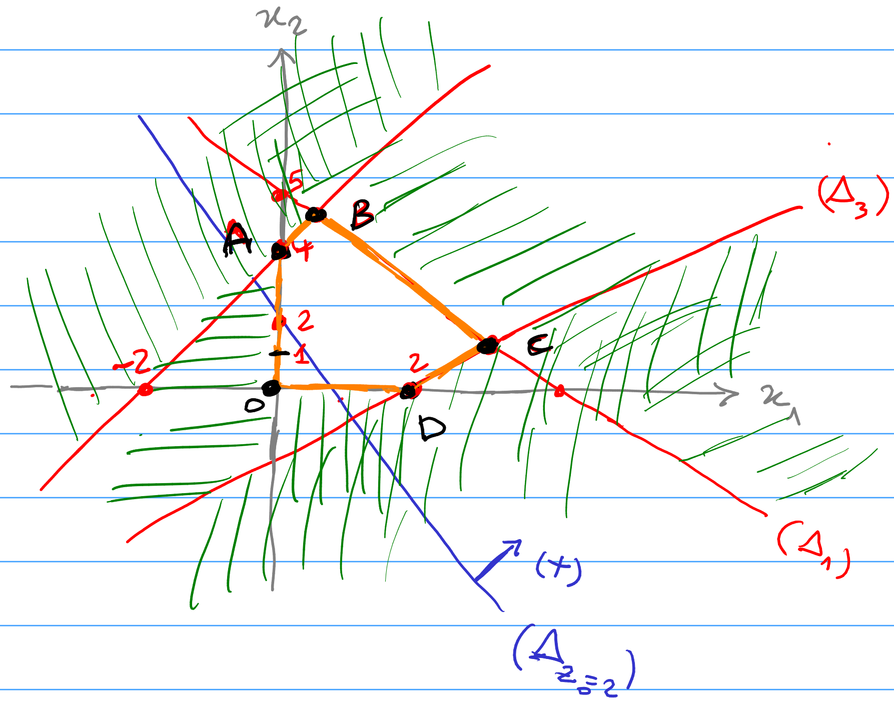
④ Méthode des pts. Intérieurs.

• Méthode Graphique :

La Méthode graphique est utilisée pour résoudre des problèmes de PL à deux variables. Elle consiste à représenter graphiquement les contraintes et la fn. objective pour identifier la région faisable (admissible) et déterminer la solution optimale. C'est une méthode visuelle et intuitive, mais elle est limitée au problème à une ou deux dimensions.

Ex.
$$\begin{cases} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

L'intersection des cinq demi plans représentant les contraintes, forme le polygone OABCD, qui est l'ensemble des solutions admissibles.



La fn. objective z est représentée par l'eqn. (Δ_{z_0}) : $2x_1 + x_2 = z_0$,
Pour $z_0 = 2$, on aura $2x_1 + x_2 = 2$

Si l'on déplace la droite (Δ_{z_0}) dans le sens de la flèche (+), qui est le sens de croissance du bénéfice, l'optimum sera atteint au point extrême $\{x^*\} = \Delta_1 \cap \Delta_3 = \{C\}$
D'où la solution optimale $x^* = (4, 1)$ avec $z_0 = 9$.

- Adaptation à la méthode graphique :

Dans les modèles linéaires avec des contraintes d'égalités, lorsque la différence entre le nombre d'inconnues ($n \geq 3$) et le nombre d'eqns. (m) est $n - m = 1$ ou $n - m = 2$, il est possible de transformer le modèle en une forme à une ou deux variables, en l'adaptant à la méthode graphique.

Considérons maintenant le PL suivant :
$$\begin{cases} \max z = c^T x \; ; \\ Ax = b \; ; \\ x \geq 0 \; . \end{cases}$$

où $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

Si le nombre de variables est supérieur d'une unité ou de deux unités par rapport au nombre d'éqns., alors la résolution d'un tel problème peut se faire simplement par la méthode géométrique pour les deux cas :

1er cas ; $n-m=1$: On fixe une variable, par exemple x_1 et on calcule les autres variables : $x_2, \ldots, x_n$ en fn. de x_1 dans les éqns. $Ax=b$, on obtient :

$$\begin{cases} x_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_n \end{cases}$$

On remplace ces variables par leurs valeurs dans la fn. objective qui devient :

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = \gamma_1 x_1 + \gamma$$

une fn. d'une seule variable, dont le maximum sera trouvé en fn. du signe de α_1 et des bornes de x_1.

2ème cas : $n-m=2$

On fixe deux variables par exemple x_1 et x_2 et on calcule $x_3, \ldots, x_n$ en fn. de x_1 et x_2 :

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_3 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \alpha_n \end{cases}$$

en remplace $x_3, \ldots, x_n$ dans la fn. objective z, qui devient :

$$z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma.$$

En suite dans un plan (Ox_1x_2) on trace tous les demi-plans $x_j \geq 0$, qui donneront le domaine des solutions admissibles. Par suite on tracera la droite (Z) d'eqn. $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$, correspond à $\gamma = 0$.

De là suivant le signe de γ_1 et γ_2, on trouvera le pt. extrême qui correspond au maximum désiré.

Ex.

$$\begin{cases} \max Z = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad \dots \text{①} \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 10 \quad \dots \text{②} \\ x_j \geq 0 \; ; \; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Ici $n = 3$, $m = 2$, donc $n - m = 1$, on fixe par exemple x_1 et on calcule les autres variables en fn. de x_1 :

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{3}{2}x_1 + 10 \; ; \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 . \end{cases}$$

Donc $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 = \frac{7}{2}x_1 - 10$.

On sait que $x_j \geq 0$; $j = \overline{1,3}$, c-à-d

$$-\frac{3}{2}x_1 + 10 \geq 0 \; , \; \frac{1}{2}x_1 \geq 0 .$$

finalement $0 \leq x_1 \leq \frac{20}{3}$, et le problème s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \max Z = \frac{7}{2}x_1 - 10 \; ; \\ x_1 \geq 0 \; ; \\ x_1 \leq \frac{20}{3} . \end{cases}$$

donc le $\max z = \max\limits_{0 \leq x_1 \leq \frac{20}{3}} \left(\frac{7}{2} x_1 - 10 \right)$ est atteint pour $x_1^* = \frac{20}{3}$

En suite on trouve $x_2^* = \frac{10}{3}$, $x_3^* = 0$ et $z^* = \frac{40}{3}$.