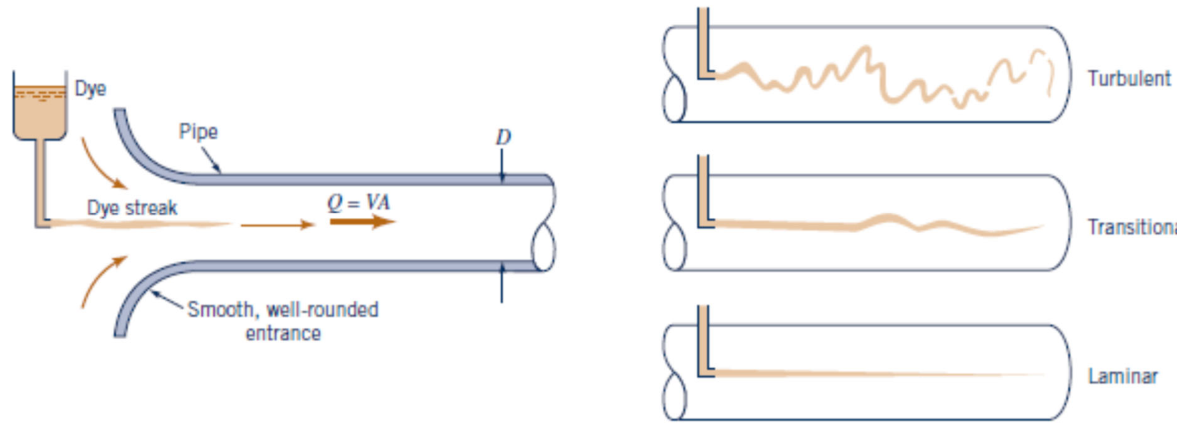
الفصل 4: ديناميكا السوائل الحقيقية غير القابلة للضغط

1. أنماط التدفق وتجربة رينولدس-Reynolds-

هناك نوعان أساسيان من أنماط التدفق للسوائل: النمط الأول يسمى رقائقي أو صفائحي-laminaire- والنمط الثاني مضطرب-turbulent-، في النمط الأول يتدفق السائل في صفائح تنزلق فوق بعضها البعض؛ حيث يتم ملاحظة خطوط السريان بشكل واضح. من ناحية أخرى، في النظام المضطرب، تعطي خطوط السريان أشكالًا فوضوية مختلطة. كان أوزبورن رينولدز -Osborne Reynolds-(1912-1842) أول من ميز الفرق بين نظامي التدفق هذين. استخدم رينولدس تدفق الماء في أنبوب دائري بقطر D بسرعة V.حيث يحقن خط من الحبر عبر انبوب رفيع في الماء. لأحظ رينولدس انه بالنسبة للسرعات المنخفضة، يظل خط الحبر متميز للغاية مع سماكة طفيفة بسبب الانتشار في الماء. عندما يزداد التدفق (سرعة أعلى للماء)، يبدأ خط الحبر بالتذبذب في الزمان والمكان مع وجود فواصل متقطعة وغير منتظمة على طول الخط. بالنسبة للتدفقات الكبيرة، سرعان ما يصبح الخط غير واضح وينتشر بشكل عشوائي في الأنبوب. تسمى هذه الظواهر الثلاثة أنظمة: رقائقية أوصفائحية،عابرة-transitoire- ومضطربة.

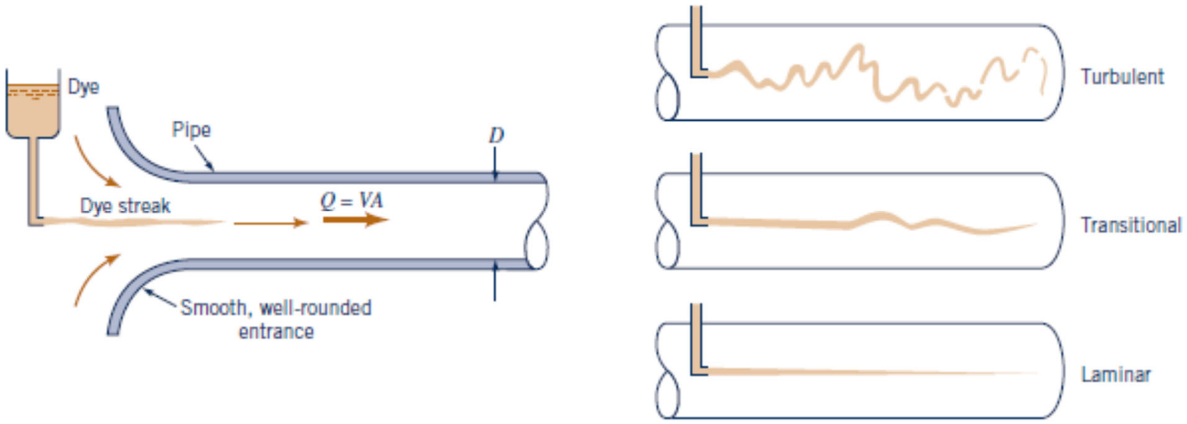


التقلبات المضطربة هي سبب تشتت الحبر في الأنبوب. في التدفق الصفحي للسرعة مكون واحد $\vec{V} = u\vec{i}$. بالنسبة إلى النمط المضطرب، الاتجاه السائد هو على طول الأنبوب مصحوبًا بالمكونات العمودية عليه $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$. بعد ما أجرى رينولدس العديد من التجارب أين غير قطر الانبوب، السائل والسرعة، تمكن من ان يثبت ان العدد المهم الذي يحدد نمط التدفق في الأنبوب، والذي سماه باسمه، "عدد رينولدز" هو $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ حيث V هي متوسط السرعة في الأنبوب، لذلك يكون التدفق صفحيًا إذا كان $Re < 2100$ ، يكون مضطربًا إذا $Re > 4000$ بين الاثنين هو الانتقال.

Chapter 4: Dynamics of real incompressible fluids in circular pipes

1. Flow regimes and Reynolds experiment

There are two flow regimes for fluids: Laminar and turbulent. In the first regime, the fluid flows in lamellae, which slide over each other; the streamlines are well-defined. On the other hand, in the turbulent regime, the streamlines mix, giving chaotic shapes. Osborne Reynolds (1842-1912) was the first to distinguish the difference between these two flow regimes. It uses a flow of water in a circular pipe of diameter D with a velocity V. Reynolds injects a neutral stream of dye into the water; for low velocities, the thread remains very distinct with a slight thickening due to the diffusion of the dye in the water. For greater flow (higher speed), the dye stream fluctuates in time and space with intermittent and irregular breaks along the pipe. The thread quickly becomes indistinct and randomly diffuses into the pipe for significant flow rates. These three phenomena are called regimes: laminar, transient, and turbulent.



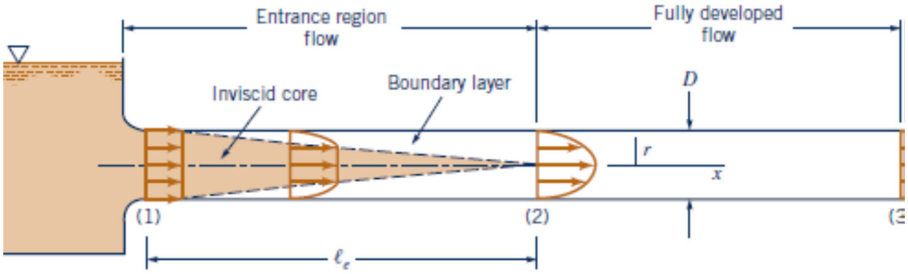
Turbulent fluctuations are the cause of the dispersion of the dye in the pipe. In laminar flow, the velocity has a single component $\vec{V} = u\vec{i}$. For the turbulent one, the predominant direction is along the pipe accompanied by the components normal to the pipe $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$. The important parameter that determines the flow regime in the pipe is called the "Reynolds number" $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ where V is the average speed in the pipe; thus, the flow is laminar if Re <2100, and it is turbulent if Re>4000 between the two; it is the transition.

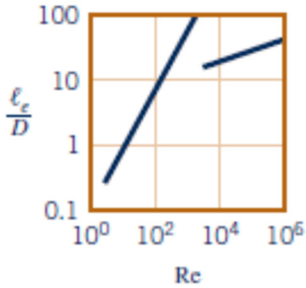
<u>2.طول المدخل والتدفق المتطور:</u>

يُطلق على بداية الأنبوب منطقة "المدخل"، حيث يدخل السائل بسرعة ثابتة تقريبًا (القسم (1)). أثناء حركتها، تشكل التأثيرات اللزجة طبقة بالقرب من الجدار تسمى "الطبقة الحدودية"، في هذه الطبقة تنخفض السرعة باتجاه الجدار حتى تنعدم على هذا الأخير تحت تأثير اللزوجة. عندما يعبر السائل منطقة المدخل يصبح توزيع السرعة العمودي ثابتا ابتداء من مسافة $\boldsymbol{l_e}$ من المدخل، يقال إن التدفق "متطور بالكامل".

يتم إعطاء طول المدخل للتدفق الرقائقي بواسطة: $\boldsymbol{l_e = 0.06DRe}$

أما للتدفق المضطرب يكون: $\boldsymbol{l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}}}$



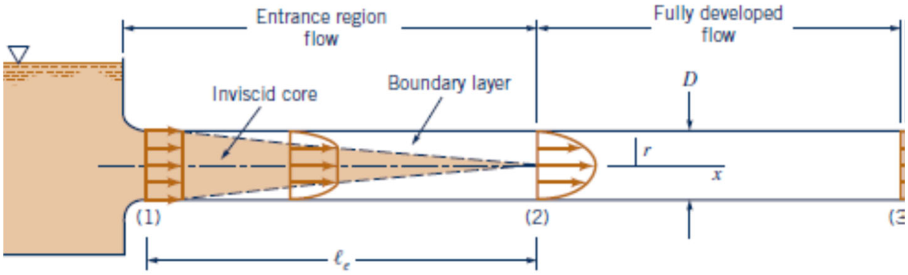


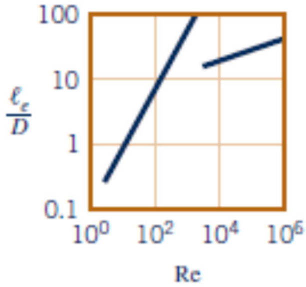
2. Entrance region and fully developed flow:

The “entrance region” of a pipe is the region where the fluid enters at an almost constant speed (section (1)). During its movement, the viscous effects form a layer near the wall called the “boundary layer”. In this layer, the speed decreases towards the wall until it is canceled out on the latter under the effect of viscosity. From a distance from the inlet, the velocity profile remains unchanged; the flow is said to be “fully developed”. And *le* is said the entrance region length.

For laminar flow, the entrance length is given by $\boldsymbol{l_e = 0.06DRe}$

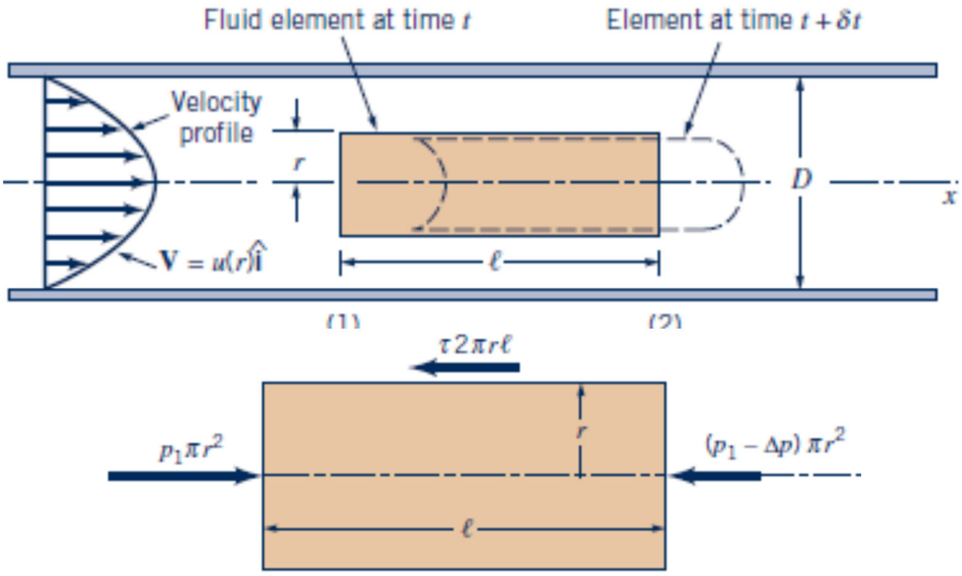
For turbulent flow, it is: $\boldsymbol{l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}} l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}}}$





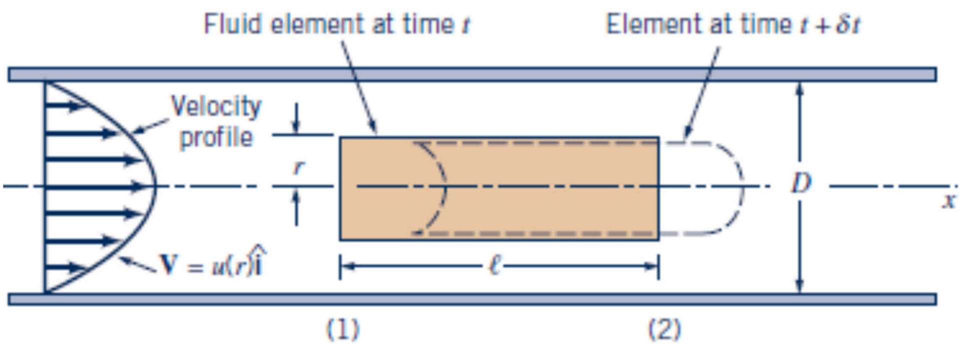
3. خسائر الضغط الخطي في الأنابيب

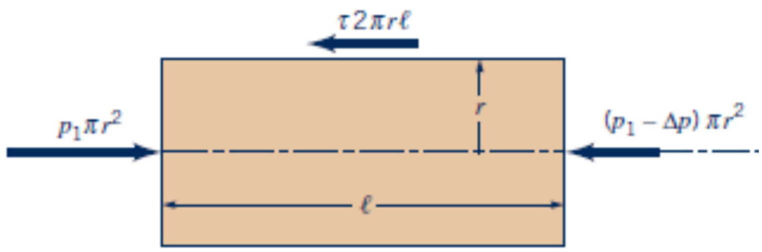
في هذا الجزء سوف نحسب خسائر الضغط أو الارتفاع المسمى "خسائر الضغط"، وهذا الأخير ناتج عن الاحتكاك بين جزيئات السائل والجدران الصلبة للأنابيب. سننظر في الجريان المتطور في الأنابيب، ثم نحسب انخفاض الضغط P على طول الأنبوب الناتج عن الاحتكاك بين جزيئات السائل والجدران. لهذا، نأخذ عنصرًا أسطوانيًا من السائل بطول *l* ونصف قطر r متمركز على المحور x الأفقي في أنبوب قطره D.



3. Linear pressure losses in pipes

In this part, we will calculate the pressure or height losses; the latter is due to friction between the fluid particles and the solid walls of the pipes. We will consider the fully developed flow in the pipes; then, we will calculate the pressure losses ΔP along the pipe caused by the friction between the fluid particles and the walls. To do this, let us take a cylindrical fluid element of length *l* and radius r centered at the horizontal x-axis in a pipe of diameter D.





نمثل الأسطوانة في الأوقات t و t + Δt ؛ يتطور الجريان ثم يكون توزيع السرعة ثابتًا مما يعني أن التسارع المحلي هو صفر ($dv/dt = 0$). إذا تم إهمال تأثيرات الجاذبية ($g = 0$) ، يكون الضغط ثابتًا في المقاطع العرضية ويختلف على طول الأنبوب من قسم إلى آخر. نأخذ نقطتين (1) و (2) ، عند النقطة (1) $P = P_1$ عند النقطة (2) $P = P_2$. نظرًا لوجود خسارة في الضغط (الارتفاع) ، فإن $P_2 = P_1 - P$ مع ΔP هو انخفاض الضغط بين النقطتين (1) و (2) ($P > 0$).

نعلم ان الإجهاد اللزج متعلق بالمسافة من سطح الانبوب r، $\tau = \tau(r)$ ، نطبق قانون نيوتن الثاني $F = ma$ على الأسطوانة في اتجاه الجريان x $F_x = \Sigma m a_x$ في هذه الحالة $a_x = 0$ (تدفق متطور بالكامل) ، لذلك يصبح لدينا :

$$\boldsymbol{p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0}$$

هذا يعطي $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$ ، و بما ان $\frac{\Delta p}{l}$ لا يتعلق ب r ، يجب ألا يتعلق $\frac{2\tau}{r}$ أيضًا بها ، أي يجب أن تكون τ مساوية لـ $\tau = cte.r$ حيث نطبق شروط الحدود لحساب هذا الثابت.

عند $r = 0$ لدينا $\tau = 0$ ، لا يوجد احتكاك ، وعند $r = D/2$ (على جدار الأنبوب) يكون الاجهاد الأقصى، ويسمى τ_p أو τ_w وبالتالي $\tau_w = cte.D/2$ الذي يعطي $cte = 2\tau_w/D$ ونحصل على الاجهاد بدلالة r : $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$ يتغير هذا الضغط خطيًا مع r. إذا استبدلنا τ في العلاقة:

$$p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - 4\pi \frac{\tau_w}{D} l r^2 = 0.$$

نجد :

$$\boldsymbol{\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}}$$

تعني هذه الصيغة أن قيمة معتدلة (صغيرة) لـ τ_w يمكن أن تؤدي إلى خسارة كبيرة في الضغط أو الارتفاع إذا كان الأنبوب طويلاً بما يكفي ***l/D>>1***.

We represent the cylinder at times *t* and *t+Δt*; the flow being developed then the velocity profile is constant, which means that the local acceleration is zero (*dv/dt=0*). If the effects of gravity are neglected (*g=0*), the pressure is constant in the cross sections and varies along the pipe from one section to another. Let us take two points (1) and (2); at point (1), $P=P_1$ at point (2), $P=P_2$. Since there is a loss of load (pressure) then $P_2= P_1- \Delta P$ with ΔP is the pressure drop between points (1) and (2) (ΔP >0).

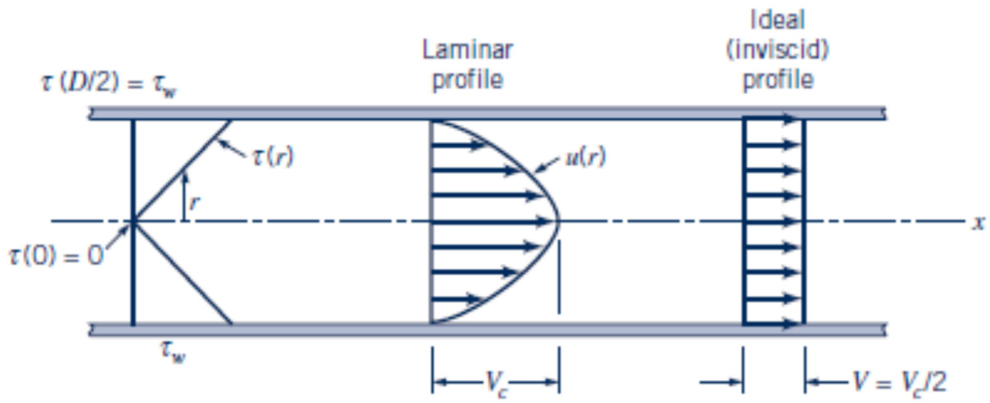
The viscous stress is a function of r, τ=τ(r), let us apply Newton's second law F=ma to the cylinder in the x direction: $F_x=\Sigma m.a_x$ in this case $a_x=0$ (fully developed flow), we have therefore: : $p_1\pi r^2-(p_1-\Delta p)\pi r^2-\tau 2\pi r l=0$ this gives $\frac{\Delta p}{l}=\frac{2\tau}{r}$. Since $\frac{\Delta p}{l}$ do not depend on r, $\frac{2\tau}{r}$ must not also depend on it, i.e. τ must be equal to τ=cte.r. Let's apply the boundary conditions to calculate this constant.

At r=0, we have, τ=0 no friction, and at r=D/2 (on the wall of the pipe), the stress is maximum, it is noted τ_w, therefore, τ_w= cte.D/2 which gives cte=$2\tau_w$/D and we obtain the constraint as a function of r: $\tau=\frac{2\tau_w}{D}r$ this constraint varies linearly as a function of r. If we replace τ in the relation $\frac{\Delta p}{l}=\frac{2\tau}{r}$ we will get $\boldsymbol{\Delta p=4\frac{l\tau_w}{D}}$

This formula means that a moderate (small) value of τ_w can produce a significant pressure loss if the pipe is long enough l/D>>1.

حساب توزيع السرعة والتدفق وفقًا لانخفاض الضغط

نأخذ جريان متطورفي أنبوب دائري كما هو موضح في الشكل.



نعلم أن إجهاد الاحتكاك في سائل نيوتن يتناسب مع تدرج السرعة: $\tau = \mu \frac{du}{dr}$ في هذه الحالة $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$ ، يتم تضمين العلامة (-) لإعطاء $\tau>0$ لان $du / dr < 0$. من خلال دمج المعادلات: $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$ و $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$ ، سيكون لدينا $\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r$

يعطي التكامل توزيع السرعة: $\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \int r dr$ حيث $u(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + c_1$

c_1 ثابت ، لإيجاده نطبق شروط الحدود.

عند جدار الأنبوب تكون السرعة صفرًا $r = \frac{D}{2} \to u = 0 \to c_1 = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$

وبالتالي فإن توزيع السرعة هو:

$$u(r) = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = V_a\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

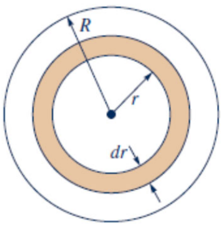
نلاحظ أن $V_a = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}$ هي السرعة على محور الأنبوب الذي نصف قطره $R = \frac{D}{2}$.

يمكن إيجاد تعبير بديل آخر باستخدام العلاقة $\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}$:

$$u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

4.1 حساب التدفق الحجمي للأنبوب

يتم حساب تدفق الحجم عبر الأنبوب من خلال التكامل:



dA = 2πr dr

$$\dot{Q} = \int u(r) d A = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = 2\pi V_a \int_0^R u\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr = \frac{\pi R^2 V_a}{2}$$

حسب التعريف، متوسط السرعة هو التدفق الحجمي مقسومًا على مساحة المقطع العرضي:

$$V_m = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{V_a}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l}$$

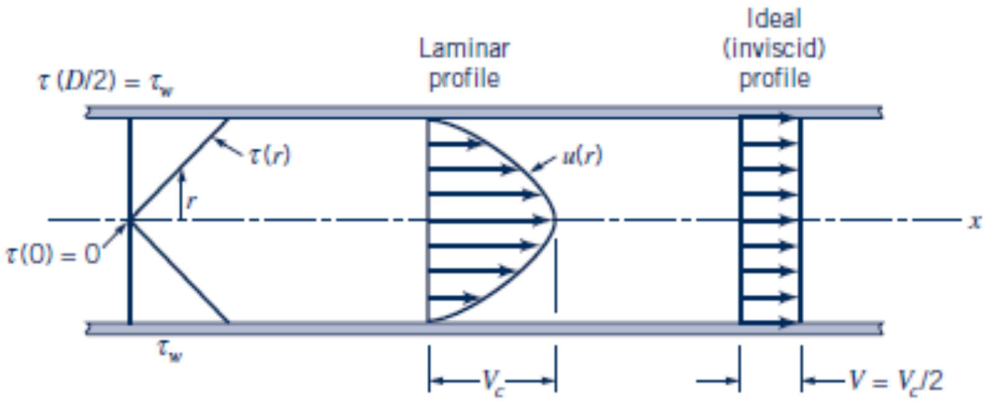
وبالتالي فإن التدفق الحجمي هو : $\dot{Q} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l}$

والتي تسمى علاقة Poiseuille

توضح هذه العلاقة أنه بالنسبة للتدفق الرقائقي في أنبوب أفقي، يتناسب التدفق بشكل مباشر مع انخفاض الضغط P والقطر D للأنبوب؛ يتناسب عكسيا مع اللزوجة μ وطول الأنبوب l.

4. Calculation of the velocity profile and flow according to the pressure loss

Consider a fully developed flow in a circular pipe, as shown in the figure.



We know that the friction stress in a Newtonian fluid is proportional to the speed gradient: $\boldsymbol{\tau = \mu \frac{du}{dr}}$ for our case $\boldsymbol{\tau = -\mu \frac{du}{dr}}$, the sign (-) is included to give τ>0 for du /dr < 0. By combining the equations: $\boldsymbol{\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}}$ and $\boldsymbol{\tau = -\mu \frac{du}{dr}}$ we will have $\boldsymbol{\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r}$.

The integration gives the velocity profile : $\boldsymbol{\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \int r dr}$ or $\boldsymbol{u(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + c_1}$

c_1 is constant; to find it, we apply the boundary conditions.

At the wall of the pipe, the speed is zero. For $\boldsymbol{r = \frac{D}{2} \to u = 0 \to c_1 = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}}$

The velocity profile is therefore:

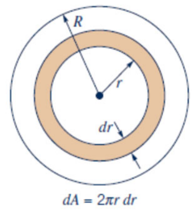
$$u(r) = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = V_a\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

We note $\boldsymbol{V_a = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}}$, the velocity on the axis of the pipe and R=D/2 its radius.

Another alternative expression can be found using the relation $\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}$:

$$\boldsymbol{u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

The volume flow rate through the pipe is calculated by:



$$\dot{Q} = \int u(r) d\,A = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = 2\pi V_a \int_0^R u\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr = \frac{\pi R^2 V_a}{2}$$

By definition, the average velocity is the flow rate divided by the cross-section:

$$V_m = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{V_a}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l}$$

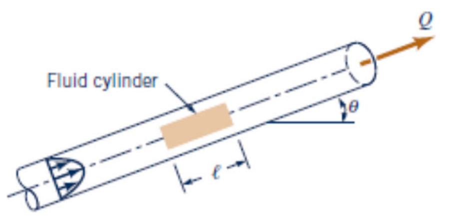
The volume flow rate is therefore:

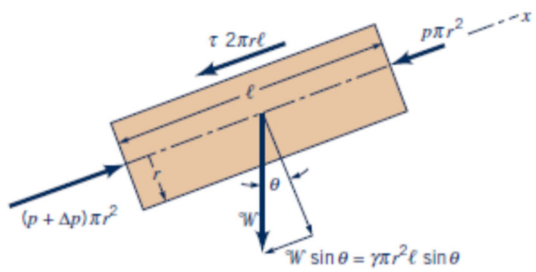
$$\dot{Q} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l}$$ which is called the Poiseuille relation.

This relationship shows that for laminar flow in a horizontal pipe, the flow rate is directly proportional to the pressure drop ΔP and the diameter D of the pipe and inversely proportional to the viscosity μ and the length of the pipe l.

4.2 حالة الأنبوب المائل

يتم تمديد الدراسة للأنابيب المائلة بأخذ أنبوب مائل بالزاوية θ بالنسبة إلى الأفق.





القوى المطبقة على العنصر المائع الأسطواني هي:

$$(p + \Delta p)\pi r^2 - p\pi r^2 - 2\pi r l\tau - \rho g \pi r^2 l \sin\theta = 0$$

$$\Delta p r - 2l\tau - \rho g r l \sin\theta = 0 \rightarrow \frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

نجد نفش شكل العبارة السابقة لذا فإن جميع نتائج الأنبوب الأفقي صحيحة بشرط أن يتم استبدال P بـ : $\Delta p - \rho g l \sin\theta$ ، ومن ثم سيكون متوسط السرعة:

$$V_m = \frac{(\Delta p - \rho g l \sin\theta) D^2}{32\mu l}$$

والتدفق الحجمي:

$$\dot{Q} = \frac{\pi D^4(\Delta p - \rho g l \sin\theta)}{128\mu l}$$

. معادلة الطاقة للتدفق في القنوات مع خسارة الضغط.

5.1 المبدأ الأول للديناميكا الحرارية للسريان أحادي البعد، مستقر وبدون عمل خارجي.

انحفاظ الطاقة يكتب: $\Delta\dot{Q} + \Delta\dot{W} = \Delta\dot{E} = \Delta(\dot{m}e)$

مع $\dot{m}$ هو تدفق الكتلة. في هذه الحالة، يكون هناك فقدان للحرارة ناتج عن الاحتكاك، والعمل الوحيد غير الصفري هو عمل قوى الضغط عند مدخل وخروج حجم التحكم. صافي الاستطاعة المفقودة كحرارة هو: $\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_s - \dot{Q}_e = \dot{Q}_{net}$

الاستطاعة الناتجة في شكل العمل مساوية: $\Delta\dot{W} = -\Delta(Fv) = -\Delta(pvs) = -[(pvs)_s - (pvs)_e]$ مع v السرعة.

إذا طبقنا معادلة المبدأ الأول على حجم التحكم الموضح في الشكل، نجد:

$$\dot{Q}_{net} - [(pvs)_s - (pvs)_e] = \Delta(\dot{m}e) = \left[\dot{m}\left(u + \frac{v^2}{2} + gz\right)\right]$$

مع $\dot{m} = \rho vs$ ، (السرعة v والطاقة الداخلية u).نقسم المعادلة على $\dot{m} = \rho vs$ بعد ترتيب المعادلة:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = \left(\frac{p_s}{\rho_s} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho_e} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e\right)$$

$$\dot{Q}_{net} = \frac{\dot{q}_{net}}{\dot{m}}$$

إذا لم يكن هناك احتكاك، فيجب أن نجد علاقة برنولي، هذا ما يستوجب:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = 0$$

وفقًا للمبدأ الثاني للديناميكا الحرارية إذا كان هناك احتكاك، فإن $\Delta s = \Delta Q/T > 0$. ما يعني أن :

$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) > 0$ والاحتكاك خسارة $= \dot{q}_{net} - (u_s - u_e)$

بشكل عام، تتم كتابة معادلة الطاقة للسريان المستقر غير القابل للضغط بين محطتين (1) و (2):

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

التي تكتب ايضا:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \mathrm{v}_1^2 - \alpha_2 \mathrm{v}_2^2}{2g} + z_1 - z_2 = h_L$$

المعاملات α_1 و α_2 تعوض عن توزيع السرعة غير المنتظم، إذا كان هذا الأخير منتظما فان $\alpha 1 = \alpha 2 = 1$. ترجع الخسارة إلى اللزوجة. لإيجاد عبارة هذه الخسارة، نقارن معادلة الطاقة مع المعادلة المحسوبة مسبقا:

$$\frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

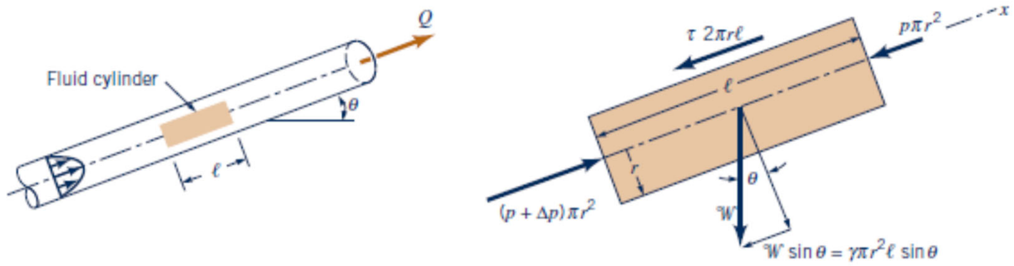
والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\frac{\Delta p}{\rho g} - l \sin\theta = \frac{2\tau l}{\rho g r}$$

من الملاحظ أن $\Delta p = p_1 - p_2$, $z_2 - z_1 = l \sin\theta$ و $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2$ لأنبوب بمقطع ثابت. من ناحية أخرى ، لدينا: $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$ ، حيث نحصل على: $h_L = \frac{2\tau l}{\rho g r} = \frac{4 l \tau_w}{\rho g D}$.

5. Case of an inclined pipe

The inclined pipes will be extended by taking an inclined pipe with the angle θ relative to the horizontal.



The forces applied to the cylindrical element are:

$$\boldsymbol{(p + \Delta p)\pi r^2 - p\pi r^2 - 2\pi r l \tau - \rho g \pi r^2 l \sin\theta = 0}$$

$$\boldsymbol{\Delta p r - 2 l \tau - \rho g r l \sin\theta = 0 \rightarrow \frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}}$$

Therefore, all the results of the horizontal pipe are valid, provided that ΔP will be replaced by

$\boldsymbol{\Delta p - \rho g l \sin\theta}$, from which the average speed will be:

$$\boldsymbol{V_m = \frac{(\Delta p - \rho g l \sin\theta) D^2}{32 \mu l}}$$

And the volume flow rate: $\boldsymbol{\dot{Q} = \frac{\pi D^4 (\Delta p - \rho g l \sin\theta)}{128 \mu l}}$