تمهيد:

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام تعطي فكرة عن خصائص هذه البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها، تتوجب إتمام الدراسة من خلال التطرق لمقاييس تبين شكل التوزيع الإحصائي (الالتواء، التفلطح) والتي تعطي فكرة عن انتشار البيانات على المنحنى البياني الممثل لها من حيث التوائه وتفلطحه عن الوضع الطبيعي، تسمى هذه المقاييس مقاييس الشكل.

1. الالتواء:

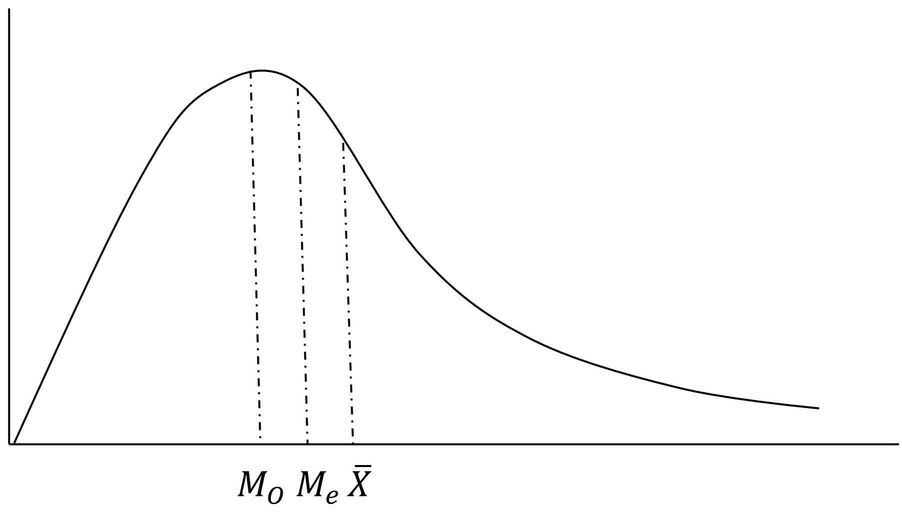
إن موضوع الالتواء يقترن بالتوزيعات التكرارية ومنحنياتها، ويعرف الالتواء بأنه مقدار جنوح التوزيع نحو يمين خط التماثل أو نحو يساره، أو أنه مقدار اختلاف منحنى التوزيع عن التماثل.

الهدف من دراسة الالتواء هو تكوين فكرة عن شكل وهيئة منحنى التوزيع التكراري واتجاه تكدس التكرارات، ويمكن تكوين فكرة مسبقة عن وجود التواء في التوزيع دون معرفة قيمته إذا توفرت المعلومات التالية:

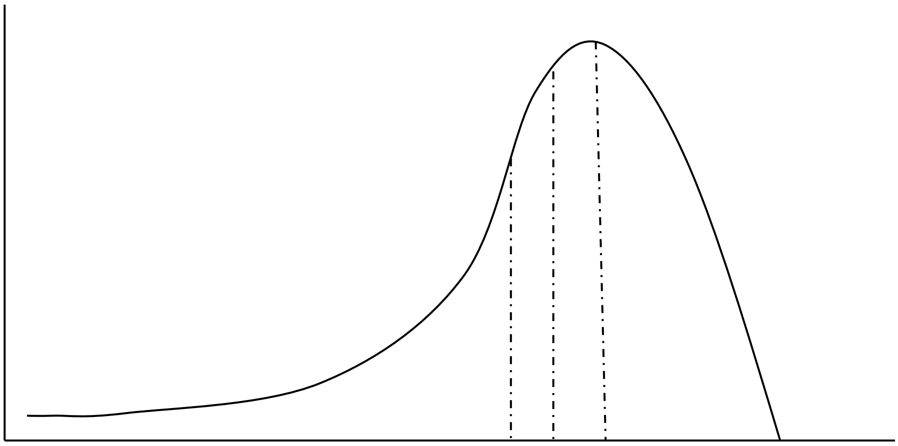
- ✓ المتوسطات الثلاثة غير متساوية؛ أي أن: $\bar{X} \neq M_O \neq M_e$.
- ✓ الفرق بين الربيع الثالث والوسيط غير مساوي للفرق بين الوسيط والربيع الأول؛ أي أن:
  $Q_3 - M_e \neq M_e - Q_1$.
- ✓ رسم المنحنى التكراري للتوزيع يوحي لنا بوجود جنوح نحو يمين خط التماثل أو نحو يساره.

1.2. أشكال الالتواء: يمكن توضيح الالتواء من خلال الأشكال الثلاثة الآتية:

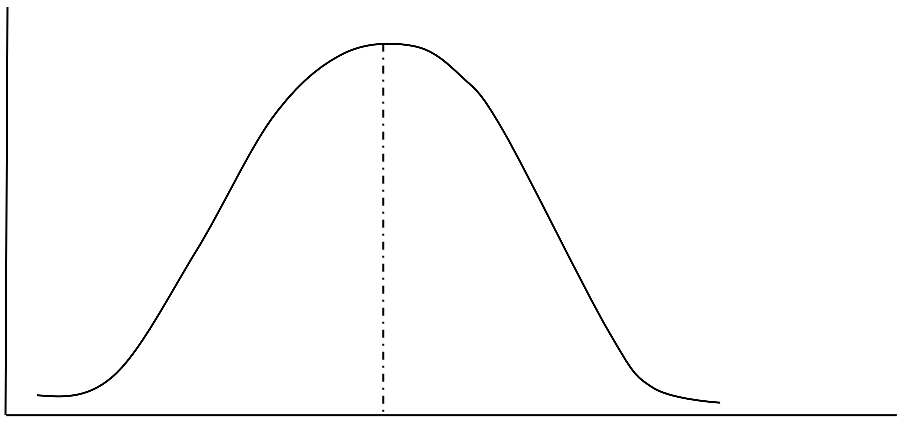
- **توزيع ملتوي نحو اليمين (موجب الالتواء):** في هذه الحالة يكون: $\bar{X} > M_e > M_O$.



- **توزيع ملتوي نحو اليسار (سالب الالتواء):** في هذه الحالة يكون: $\bar{X} < M_e < M_O$.



- **توزيع متماثل:** في هذه الحالة يكون: $\bar{X} = M_e = M_O$.



2.2. مقاييس الالتواء: هنالك مقاييس عديدة تبين لنا نوع الالتواء وقيمته، نذكر منها:

1.2.2. مقاييس الالتواء المطلقة: هذا النوع من المقاييس يوضح لنا درجة التواء التوزيع على نحو مطلق أي أن وحدات قياسها هي نفس وحدات قياس المتغير الأصلي X_i.

على افتراض أن المقاييس التالية تم حسابها من توزيع تكراري وهي: X, M_o, M_e, Q_1, Q_3.

عندئذ فإن مقاييس الالتواء المسندة لهذه المعطيات هي كالآتي:

أ. معامل الالتواء α_0 على أساس الفرق ما بين المتوسط الحسابي والوسيط: أي أنه إذا كان:

$$\propto_0 = \bar{X} - M_e = \begin{cases} - \text{ وجود التواء سالب} \\ 0 \text{ التوزيع متماثل} \\ + \text{ وجود التواء موجب} \end{cases}$$

ب. معامل الالتواء α_0 على أساس الفرق ما بين المتوسط الحسابي والمنوال: أي أنه إذا كان:

$$\propto_0 = \bar{X} - M_o = \begin{cases} - \text{ وجود التواء سالب} \\ 0 \text{ التوزيع متماثل} \\ + \text{ وجود التواء موجب} \end{cases}$$

مثال 1:

لوحظ في توزيع تكراري أن: $\bar{X} = 59,5; \quad M_o = 58,75$

المطلوب: أوجد قيمة ونوع الالتواء في هذا التوزيع.

الحل:

$$\propto_0 = \bar{X} - M_o = 59,5 - 58,75 = 0,75$$

قيمة الالتواء هي: $0,75$ وهو التواء موجب.

ج. معامل الالتواء α_0 على أساس الربيعيات: المقياسين السابقين للالتواء مفيدان في حالة إمكانية حساب المتوسط الحسابي للتوزيع، وفي حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة التي لا يمكن فيها حسابه يتم استخدام معامل الالتواء على أساس الربيعيات لحساب الالتواء كالتالي:

$$\propto_0 = (Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1) = \begin{cases} - \text{ وجود التواء سالب} \\ 0 \text{ التوزيع متماثل} \\ + \text{ وجود التواء موجب} \end{cases}$$

يعاب على مقاييس الالتواء المطلقة كونها:

مثال 2:

لوحظ في توزيع تكراري أن: $Q_1 = 6,8; \quad M_e = 8,8; \quad Q_3 = 10,4$

المطلوب: أوجد قيمة ونوع الالتواء في هذا التوزيع.

الحل:

$$\propto_0 = (Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1) = (10,4 - 8,8) - (8,8 - 6,8) = -0,4$$

قيمة الالتواء هي: $0,4$ وهو التواء سالب.

2.2.2. مقاييس الالتواء النسبية:

إن هذا النوع يقيس درجة الالتواء ونوع الالتواء بشكل نسبي وهي خالية من وحدات القياس. إن هذا النوع من المقاييس نافع في حالة إجراء مقارنة بين توزيعين أو أكثر كونها تأخذ في الاعتبار تشتت التوزيع. هذه المقاييس تسمى معاملات الالتواء، وهي:

أ. معامل بيرسون الأول للالتواء: إن هذا المعامل مقترح من قبل العالم كارل بيرسون، وبافتراض أنه أمكن الحصول على المتوسط الحسابي والمنوال والانحراف المعياري من توزيع تكراري، عندئذ ووفق هذه المعطيات يمكن قياس التواء التوزيع وفق الصبغة التالية:

$$\propto_{P_1} = \frac{\bar{X} - M_o}{S} = \begin{cases} \text{وجود التواء سالب} & - \\ \text{التوزيع متماثل} & 0 \\ \text{وجود التواء موجب} & + \end{cases}$$

إن القسمة على الانحراف المعياري تعني جعل المقياس لا يعتمد على وحدة القياس المستعملة في البيانات.

إذا كنا لا نستطيع تطبيق معامل الالتواء الأول لبيرسون، وذلك لكون قيمة المنوال مجهولة (او لا يمكن حسابها : الفئة المنوالية في بداية التوزيع او في اخره) فيمكننا الاعتماد على علاقة بيرسون بين المتوسطات إذا كان التوزيع قريبا من التماثل:

$$M_o = 3\,M_e - 2\,\bar{X}$$

ومن خلال التعويض في معامل الالتواء الأول لبيرسون، نحصل على معامل الالتواء في صورة جديدة وفق الآتي:

$$\propto_{P_1} = \frac{3\,(\bar{X} - M_e)}{S} = \begin{cases} \text{وجود التواء سالب} & - \\ \text{التوزيع متماثل} & 0 \\ \text{وجود التواء موجب} & + \end{cases}$$

إن معامل الالتواء الأول لبيرسون يعتبر من المعاملات الجيدة في قياس درجة الالتواء ونوعه، إلا أنه لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة، وفي هذه الحالة يتم اللجوء إلى مقياس آخر أكثر ملائمة.

مثال:

تمثل البيانات التالية معدلات مجموعتين من طلبة السنة أولى علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير بجامعة أم البواقي بعد مداولات الدورة الثانية.

المجموعة الأولى	
المعدل	n_i
5,50−4,50	3
6,50−5,50	4
7,50−6,50	6
8,50−7,50	9
9,50−8,50	17
10,50−9,50	34
11,50−10,50	17
12,50−11,50	9

المجموعة الثانية	
المعدل	n_i
5,50−4,50	3
6,50−5,50	4
7,50−6,50	5
8,50−7,50	6
9,50−8,50	8
10,50−9,50	11
11,50−10,50	15
12,50−11,50	18

13,50−12,50	6
14,50−13,50	4
15,50−14,50	3
المجموع	112

13,50−12,50	20
14,50−13,50	18
15,50−14,50	4
المجموع	112

المطلوب: معرفة شكل توزيع معدلات الطلبة في كل مجموعة.

الحل:

- أولا؛ **بالنسبة للمجموعة الأولى:** نقوم بحساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال)، ونستعين بالجدول التالي من أجل تسهيل عملية الحساب:

الفئة	n_i	X_i	n_iX_i	$Ni\uparrow$
4,50−5,50	3	5	15	3
5,50−6,50	4	6	24	7
6,50−7,50	6	7	42	13
7,50−8,50	9	8	72	22
8,50−9,50	17	9	153	39
9,50−10,50	34	10	340	73
10,50−11,50	17	11	187	90
11,50−12,50	9	12	108	99
12,50−13,50	6	13	78	105
13,50−14,50	4	14	56	109
14,50−15,50	3	15	45	112
المجموع	112	−	1120	−

- **المتوسط الحسابي:**

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i X_i}{N} = \frac{1120}{112} = 10$$

- **الوسيط:**

$$Me = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - N_{m-1}\uparrow}{n_m} \times A$$

− رتبة الوسيط هي: $\frac{N}{2} = \frac{112}{2} = 56$

− الفئة الوسيطية هي: 9,50−10,50

وعليه نجد:

$$M_e = L_1 + \frac{\overline{2} - N_{m-1}\uparrow}{m} \times A = 9{,}50 + \frac{56-39}{34} \times 1 = 10$$

- **المنوال:**

$$M_o = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times A$$

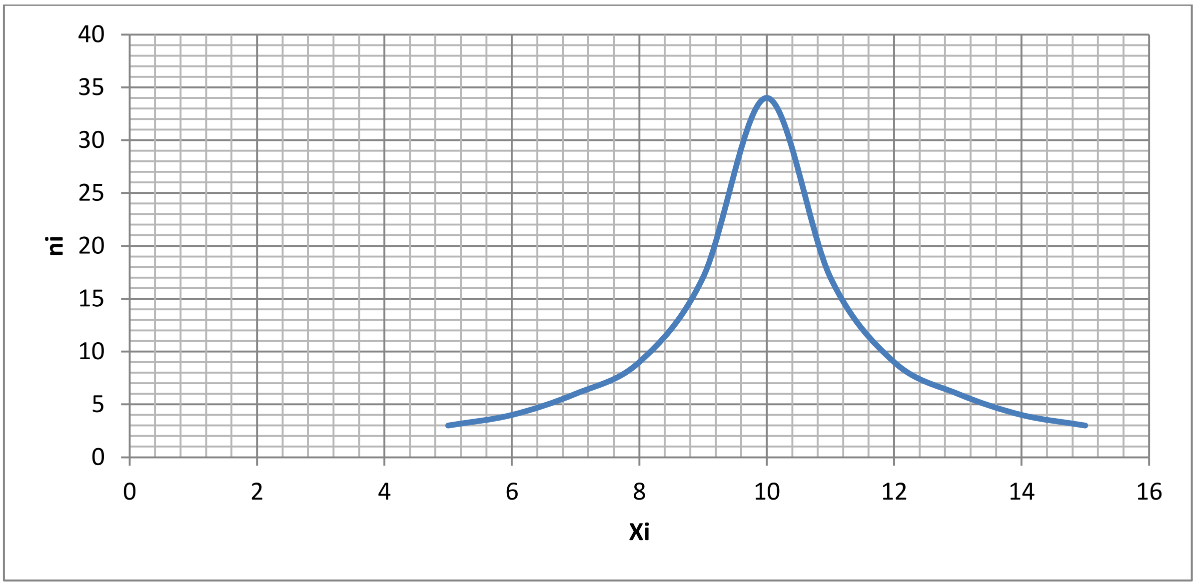
– الفئة المنوالية هي: 9,50–10,50

وعليه نجد:

$$M_o = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times A = 9{,}50 + \frac{34-17}{34-17+34-17} \times 1 = 10$$

بعد حساب متوسطات النزعة المركزية الثلاث: المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال وجدناها متساوية؛ وهذا ما يدل على أن شكل التوزيع سيكون متناظرا أو متماثلا.

- **رسم منحنى التوزيع التكراري:**



أيضا لو نقوم بحساب كل معاملات الالتواء التي عرفناها سابقا سنجدها معدومة.

– ثانيا؛ **بالنسبة للمجموعة الثانية:** نقوم بحساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال:

وفق نفس منهجية الاجابة للمجموعة الأولى نكتفي باعطاء النتائج النهائية بالنسبة للمجموعة الثانية دون شرح (المطلوب من الطلبة التأكد من النتائج منزليا كمراجعة لما تم التطرق له)

- **المتوسط الحسابي:**

$$\overline{X}=\frac{\sum n_i X_i}{N}=\frac{1257}{112}=11{,}22$$

- **الوسيط:**

$$M_e=L_1+\frac{\frac{N}{2}-N_{m-1}\uparrow}{n_m}\times A=11{,}50+\frac{56-52}{18}\times 1=11{,}72$$

- **المنوال:**

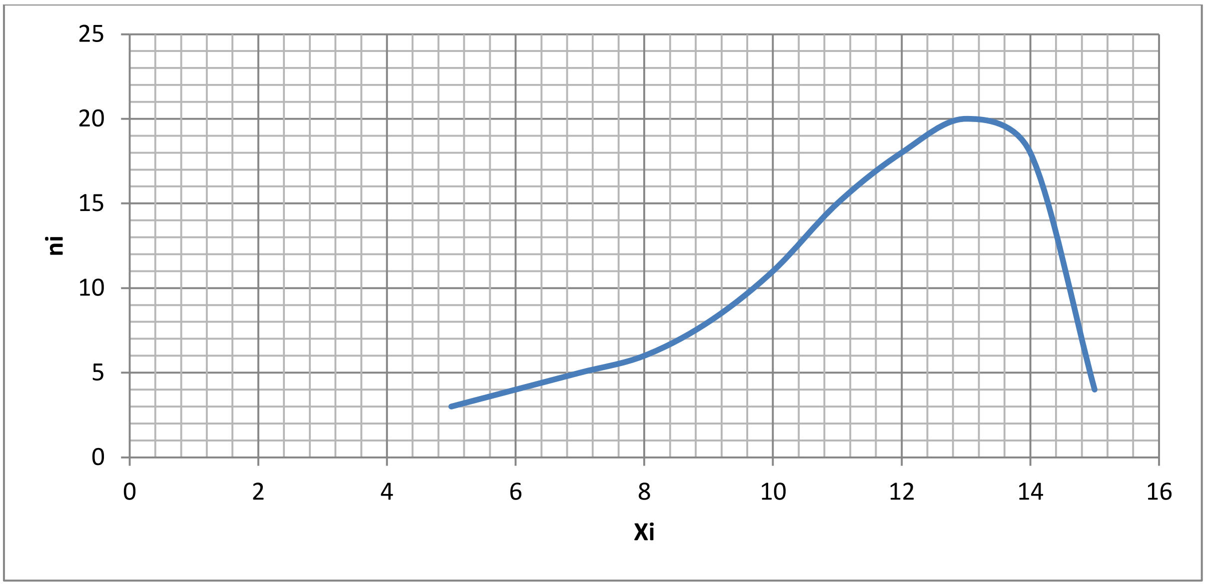
$$M_o=L_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\times A=12{,}50+\frac{20-18}{20-18+20-18}\times 1=13$$

بعد حساب متوسطات النزعة المركزية الثلاث: المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال وجدنا أن:

$$\bar{X}<M_e<M_O$$

وهذا ما يدل على أن شكل التوزيع مائل نحو اليسار أو سالب الالتواء.

- **رسم منحنى التوزيع التكراري:**



وإذا أردنا التأكد من ذلك، نقوم بحساب معاملات الالتواء لهذا التوزيع كما يلي:

❖ **معامل بيرسون الأول للالتواء:**

$$\propto_{P_1}=\frac{\bar{X}-M_o}{S}$$

لدينا:

$$M_o=13;\quad \bar{X}=11{,}22$$

تبقى حساب الانحراف المعياري؛ ونستعمل الطريقة المختصرة كما يلي:

نستعين بالجدول التالي لتسهيل الحساب:

الفئة	n_i	X_i	X_i^2	$n_i X_i^2$
4,50−5,50	3	5	25	75
5,50−6,50	4	6	36	144
6,50−7,50	5	7	49	245
7,50−8,50	6	8	64	384
8,50−9,50	8	9	81	648
9,50−10,50	11	10	100	1100
10,50−11,50	15	11	121	1815
11,50−12,50	18	12	144	2592
12,50−13,50	20	13	169	3380
13,50−14,50	18	14	196	3528
14,50−15,50	4	15	225	900
المجموع	112	-	-	14811

التباين بالصيغة المختصرة:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum n_i X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$= \frac{14811}{112} - (11,22)^2 = 132,24 - 125,89 = 6,35$$

الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{6,35} = 2,52$$

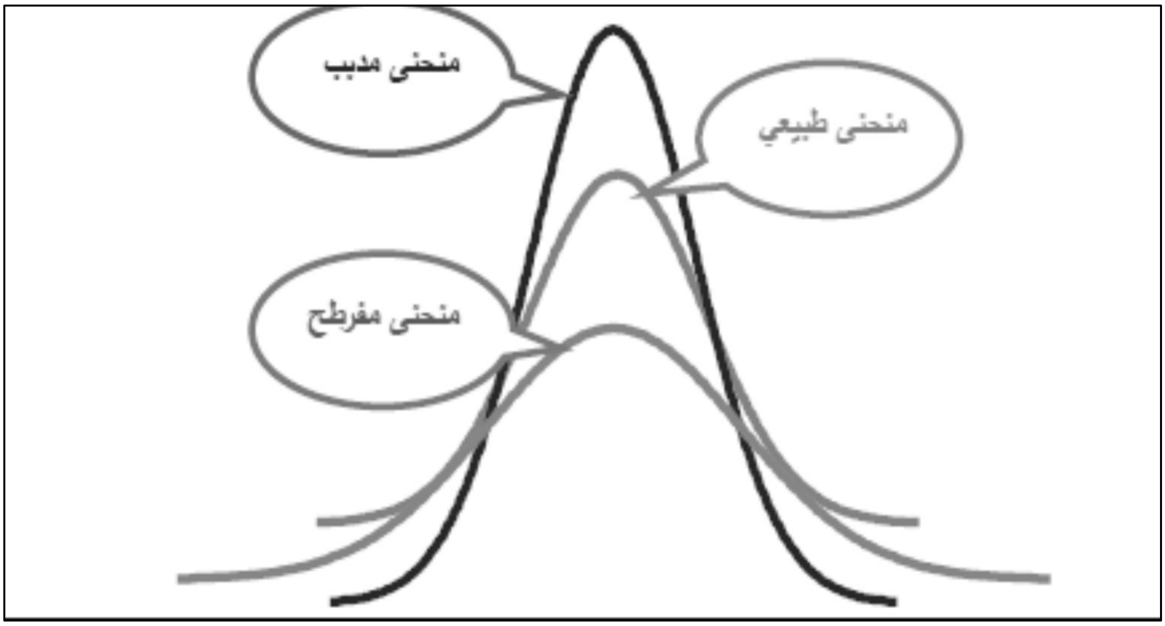
ومنه نحسب قيمة معامل بيرسون الأول للالتواء:

$$\propto_{P_1} = \frac{\bar{X} - M_o}{S} = \frac{11,22 - 13}{2,52} = -0,70$$

$\propto_{P_1} < 0$ ، معنى هذا أن منحنى التوزيع ملتوي جهة اليسار (سالب الالتواء).

3. التفرطح (التفلطح):

يعرف التفرطح بأنه درجة تدبب (مدى اتساع أو ضيق) قمة منحنى التوزيع، ويؤخذ عادة بالمقارنة مع منحنى التوزيع الطبيعي، فكلما كان الشكل أكثر ارتفاعا من الشكل الطبيعي نقول أن الشكل مدبب، أما إذا كان أقل ارتفاعا من الشكل الطبيعي فنقول عنه أنه مفرطح، والشكل البياني الآتي يبين ذلك:



يقاس التفرطح بأحد المعاملات التالية:

1.3. معامل بيرسون للتفرطح: ينطلق بيرسون من الخاصية التالية "عندما تكون السلسلة الإحصائية متناظرة، فإن العزوم المركزية من المراتب الفردية، إن وجدت تكون معدومة".

بما أن العزم المركزي من الرتبة الثانية ليس سوى التباين، فإنه اعتمد على العزم المركزي من مرتبة زوجية أعلى مباشرة؛ أي المرتبة الرابعة بشكل خاص لأن قيمته في حالة التوزيع الطبيعي تساوي ثلاثة $(\mu_4 = 3)$، حيث أن معامل التفرطح وفق بيرسون يأخذ الصيغة التالية:

$$\beta_P = \frac{\mu_4}{S^4} = \begin{cases} \beta_P = 3 & \text{منحنى التوزيع طبيعي} \\ \beta_P > 3 & \text{منحنى التوزيع مدبب} \\ \beta_P < 3 & \text{منحنى التوزيع مفرطح} \end{cases}$$

2.3. معامل فيشر للتفرطح: يقترح فيشر معاملا آخر للتفرطح، وهو أسهل للمعالجة لأن المقارنة تتم بالنسبة لقيمة الصفر، حيث يأخذ معامل فيشر للتفرطح الصيغة التالية:

$$\beta_F = \frac{\mu_4}{S^4} - 3 = \beta_P - 3 = \begin{cases} \beta_F = 0 & \text{منحنى التوزيع طبيعي} \\ \beta_F > 0 & \text{منحنى التوزيع مدبب} \\ \beta_F < 0 & \text{منحنى التوزيع مفرطح} \end{cases}$$

مثال:

بالرجوع للمثال السابق أحسب معامل التفرطح لفيشر ومعامل التفرطح لبيرسون لكل من توزيع معدلات المجموعتين الأولى والثانية.

الحل:

- **المجموعة الأولى:**

نستعين بالجدول الآتي لتسهيل الحساب:

الفئة	n_i	X_i	$Ni\uparrow$	$(X_i-\bar{X})^1$	$(X_i-\bar{X})^4$	$n_i(X_i-\bar{X})^4$	$n_i X_i^2$
4,50−5,50	3	5	3	-5	625,00	1875,00	75
5,50−6,50	4	6	7	-4	256,00	1024,00	144
6,50−7,50	6	7	13	-3	81,00	486,00	294
7,50−8,50	9	8	22	-2	16,00	144,00	576
8,50−9,50	17	9	39	-1	1,00	17,00	1377
9,50−10,50	34	10	73	0	0,00	0,00	3400
10,50−11,50	17	11	90	1	1,00	17,00	2057
11,50−12,50	9	12	99	2	16,00	144,00	1296
12,50−13,50	6	13	105	3	81,00	486,00	1014
13,50−14,50	4	14	109	4	256,00	1024,00	784
14,50−15,50	3	15	112	5	625,00	1875,00	675
المجموع	112	−	−	−	-	7092,00	11692

❖ **معامل بيرسون للتفرطح:**

$$\beta_P = \frac{\mu_4}{S^4}$$

لدينا: $\overline{X} = 10$

نحسب العزم المركزي الرابع، والانحراف المعياري:

➢ **العزم المركزي من المرتبة الرابعة:**

$$\mu_4 = \frac{\sum n_i (X_i-\bar{X})^4}{\sum n_i} = \frac{7092}{112} = 63,32$$

➢ **الانحراف المعياري:**

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum n_i X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$= \frac{11692}{112} - (10)^2 = 104,39 - 100 = 4,39$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4,39} = 2,095$$

ومنه معامل بيرسون للتفرطح يساوي:

$$\beta_P = \frac{\mu_4}{S^4} = \frac{63,32}{(2,095)^4} = \frac{63,32}{19,26} = 3,28$$

$\beta_P > 3$ ومنه نقول أن منحنى التوزيع مدبب.

❖ **معامل فيشر للتفرطح:**

$$\beta_F = \frac{\mu_4}{S^4} - 3 = \beta_P - 3 = 3,28 - 3 = 0,28$$

$\beta_P > 0$ ومنه نقول أن منحنى التوزيع مدبب.

- **المجموعة الثانية:**

وفق نفس منهجية الاجابة للمجموعة الأولى نكتفي باعطاء النتائج النهائية بالنسبة للمجموعة الثانية دون شرح (المطلوب من الطلبة التأكد من النتائج منزليا كمراجعة لما تم التطرق له)

❖ **معامل بيرسون للتفرطح:**

$$\beta_P = \frac{\mu_4}{S^4}$$

لدينا: $\overline{X} = 11,22$

نحسب العزم المركزي الرابع، والانحراف المعياري:

➢ **العزم المركزي من الدرجة الرابعة:**

$$\mu_4 = \frac{\sum n_i (X_i - \bar{X})^4}{\sum n_i} = \frac{12008,89}{112} = 107,22$$

➢ **الانحراف المعياري:**

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum n_i X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$= \frac{14811}{112} - (11,22)^2 = 132,24 - 125,88 = 6,35$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{6,35} = 2,52$$

ومنه معامل بيرسون للتفرطح يساوي:

$$\beta_P = \frac{\mu_4}{S^4} = \frac{107,22}{(2,52)^4} = \frac{107,22}{40,32} = 2,65$$

$\beta_P < 3$ ومنه نقول أن منحنى التوزيع مفرطح.

❖ **معامل فيشر للتفرطح:**

$$\beta_F = \frac{\mu_4}{S^4} - 3 = \beta_P - 3 = 2,65 - 3 = -0,35$$

ومنه نقول أن منحنى التوزيع مفرطح. $\beta_p < 0$

- **مقارنة و الحكم على المجموعتين :**

بما ان الأمر يتعلق بتوزيعين لمجموعتين ، و بالنسبة لنفس المتغير (معدل الطلبة ....) ، فيمكننا القيام بمقارنة من خلال حساب معامل الاختلاف لكل مجموعة ومن خلال النتائج يتم الحكم .

أ- بالنسبة للمجموعة الأولى :

$$C_{v1} = \frac{\delta_1}{\overline{X}_1} \text{ x } 100 \Rightarrow C_{v1} = \frac{2{,}095}{10} \text{ x } 100 = 20{,}95\%$$

ب-بالنسبة للمجموعة الأولى :

$$C_{v2} = \frac{\delta_1}{\overline{X}_1} \text{ x } 100 \Rightarrow C_{v2} = \frac{2{,}52}{11{,}22} \text{ x } 100 = 22{,}46\%$$

الحكم :

من خلال النتيجة يمكننا القول على ان المجموعة الثانية اكثر تشتت من الأولى.

وهذا ما يمكن استخلاصه من الأشكال البيانية المقابلة .

- **الوقوف على معنى الانحراف :**

عندما يكون التوزيع طبيعي :

- مقاييس النزعة المركزية متساوية .
- لايوجد إلتواء : (توزيع متماثل)
- معامل التفرطح (يساوي صفر عند فيشر و يساوي 3 عند معامل بيرسون),

رغم أن التفرطح موجود عند التوزيعين إلا انه ألطف (يكاد يساوي الصفر عند التوزيع الأول($\beta_F = 0{,}28$) (فهو مدبب قليلا ، متطاول قليلا : اعلى بقليل من التوزيع الطبيعي،(التوزيع المعتدل)).

هذا يعني ان القواعد الثلاثة الشهيرة تنطبق اكثر على التوزيع الأول :

ملاحظة :

الإنحراف المعياري عند المجموعة الأولى هو 2,095 نعتبره هنا 2 اتبسيط العمليات الحسابية

المجال النظري	المجال الفعلي	عدد الطلبة (النظري)
$\overline{X} \pm 1\delta = 68{,}26\%$	$[10-2\,;\,10+2[$ $[\ 8\ ;\ 12\ [$	عدد الطلبة الكلي في النسبة% $0{,}6826 \text{x} 112 = 76{,}452$
$\overline{X} \pm 2\delta = 95{,}44\%$	$[10-4\,;\,10+4[$ $[\ 6\ ;\ 14\ [$	$0{,}9544 \text{x} 112 = 106{,}89$ (**107**)
$\overline{X} \pm 3\delta = 99{,}74\%$	$[10-6\,;\,10+6[$ $[\ 4\ ;\ 16\ [$	$0{,}9974 \text{x} 112 = 111{,}7088$ (**112**)

- معنى السطر الأول 68,26% من المجتمع محل الدراسة (طلاب المجموعة الأولى) لهم معدل يتروح بين 8و 12 و عددهم هو 76 طالب .
- معنى السطر الأخير 99,74 % من المجتمع محل الدراسة (طلاب المجموعة الأولى) لهم معدل يتروح بين 4 و 16 و عددهم هو 111,71 (112) طالب .
- بالفعل أدنة علامة حقيقية هي 4,5 و أعلى علامة حقيقية هي 15 و بالتالي فمجالنا النظري محتوى تماما في المجال الفعلي و هذا دليل ايضا على ان التوزيع متماثل .

إنتهى القسم الأول من الإحصاء