Rappel du Cours

Étapes à suivre pour le calcul :

Nous choisissons tout d'abord un système de lignes de rupture cinématiquement admissible (qui remplit les conditions de mécanismes), puis nous écrivons que le travail des forces extérieures est égal à celui des forces internes pour une déformation donnée de la dalle transformée en mécanisme. En général, on se donne le déplacement du point d'intersection des lignes de rupture égal à l'unité, et la déformation de la dalle sera alors totalement définie.

- ✓ Travail des forces extérieures : (W_e)
- Cas général des forces concentrées :

$W_e = \Sigma P_j \delta_j$ = Somme des produits des forces par leurs déplacements respectifs.

- Cas d'une charge uniformément répartie :

$\mathbf{W_e = \iint_{(s)} q.\delta\, ds}$ ds : Élément de l'aire de la partie de la dalle

δ : Déplacement de l'élément ds.

C'est-à-dire : $W_e = q\ .s\ .\delta_G$

Avec δ_G le déplacement du c-d-g de l'aire de la surface s considérée.

- ✓ Travail des forces internes :

Simplification : si m_{pi} est le moment le long de la ligne par unité de longueur, le travail des forces intérieures s'exerce sur la longueur de la ligne de rupture considérée, mais projetée sur la direction normale aux aciers.

Wi = moment x rotation x longueur. $\mathbf{Wi = \Sigma\, m_{pi}\, \theta_i\, l_i}$

θ_i : Déviation angulaire au droit de la charnière ;

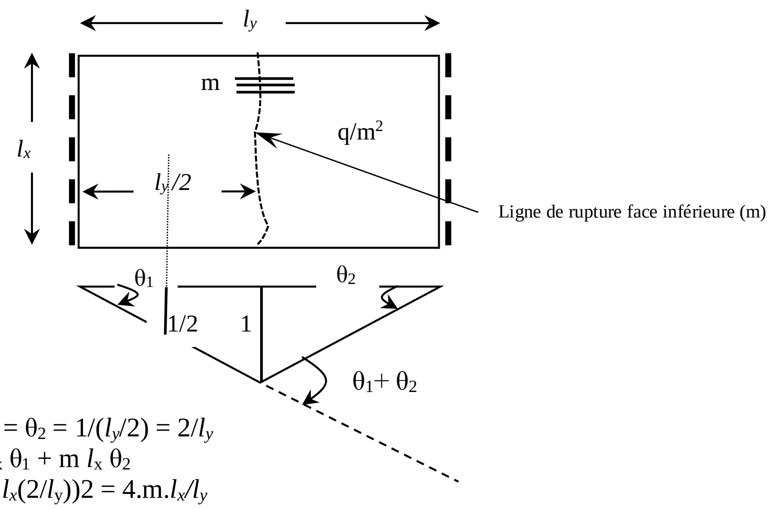
m_{pi} : Moment plastique correspondant ;

l_i : représente la longueur de la ligne de rupture subissant la rotation θ_i et ayant pour moment ultime m_{pi}.

Le signe Σ représente l'ensemble des lignes de rupture qui constitue le mécanisme.

Exercices

1/ Une dalle rectangulaire simplement appuyée sur deux côtés (voir figure).



On a : $\theta_1 = \theta_2 = 1/(l_y/2) = 2/l_y$

$W_i = m.l_x\, \theta_1 + m\, l_x\, \theta_2$

$W_i = (m.\ l_x(2/l_y))2 = 4.m.l_x/l_y$

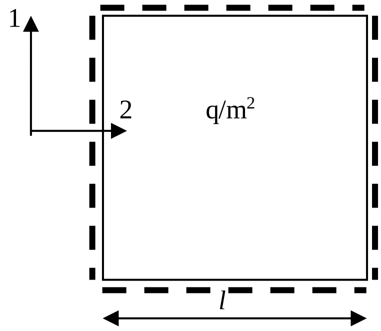
$W_e = 2(q.l_x(l_y/2)\ (1/2)) = q\ l_x.l_y\ (1/2)$

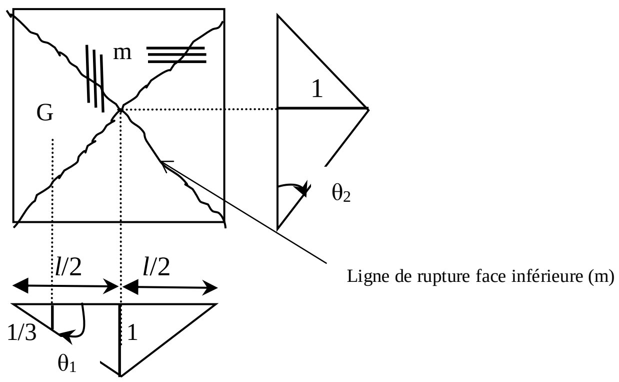
$W_i = W_e \quad 4.m.l_x/l_y = q l_x.l_y\ (1/2)$

Donne : $\mathbf{m = (1/8)\, q l_y^2}$ pour une bande de 1 mètre.

On retrouve le *comportement d'une poutre simplement appuyée.*

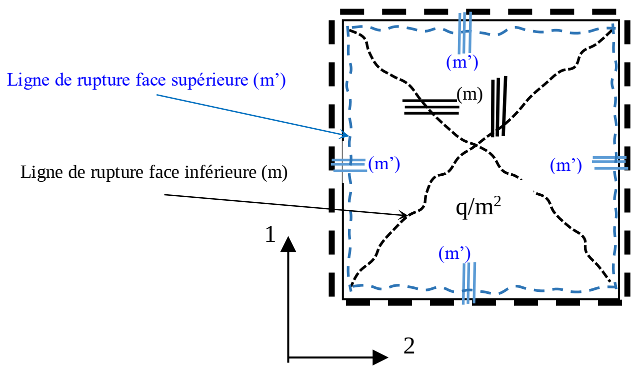
2/ Pour la dalle carrée de la figure déterminer la relation qui relie la charge uniformément répartie q au moment ultime m.
Ce moment ultime est considéré le même dans les deux directions de la dalle qui est simplement appuyée sur son contour.
(On a $m_1 = m_2 = m$).
Les lignes de rupture du panneau de dalle donnent naissance à un mécanisme de 04 éléments triangulaires qui ont pour axe de rotation les supports (contour de la dalle)





On a $\theta_1 = \theta_2 = 1/(l/2) = 2/l$
On peut écrire :
$W_i = 4\,(2(m.(2/l).\,(l/2))) = 8\,m$
$W_e = 4(q.s.\,\delta_G)$; $s = (l/2).\,l.1/2 = l^2/4$ et $\delta_G = 1/3$.
$W_e = 4\,q\,(l^2/4).1/3 = ql^2/3$
En posant $W_i = W_e$, on aura : $\mathbf{m = ql^2/24}$
En général le ferraillage de la dalle est déterminé en calcul élastique, donc le moment ultime que peut développer la dalle est connu à ce stade du calcul. Et on déduit la surcharge qui provoque la rupture de la dalle. Donc $q_{(rupture)} = 24.m/l^2$ et connaissant la charge de service, on tire le coefficient de sécurité qui est égal à : $\dfrac{q_{(rupture)}}{q_{(service)}}$

3/ Pour la dalle carrée encastrée sur son pourtour.

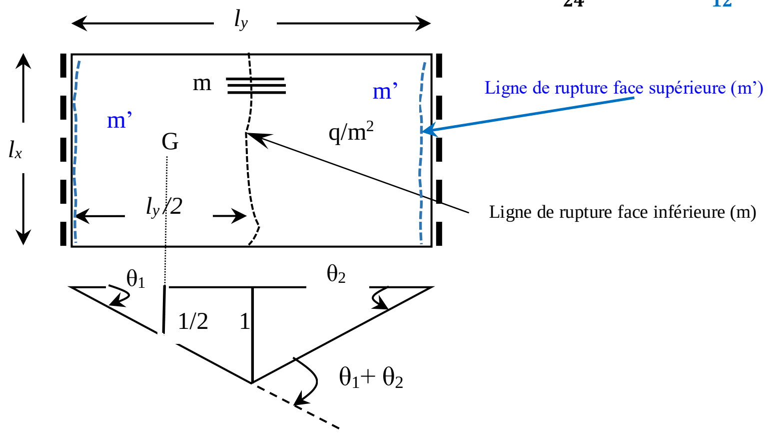


On disposera de la même section d'acier A=A'
Donc : $m_1 = m_2 = m = m'$
Comme pour l'exercice précédent, on peut écrire :
$W_i = 4\,(2(m.(2/l).\,(l/2))) + 4\,(m'.(2/l).\,(l)) = 8\,(m + m')$
$W_e = 4(q.s.\,\delta_G)$; $s = (l/2).\,l.1/2 = l^2/4$ et $\delta_G = 1/3$.
$W_e = 4\,q\,(l^2/4).1/3 = ql^2/3$
En posant $W_i = W_e$, on aura : $\mathbf{m+m' = ql^2/24}$

Le rapport m/m' peut être choisi en considérant la théorie de l'élasticité.

4/ Une dalle rectangulaire encastrée sur deux côtés (voir figure).

Avec m' = 2m et pour une charge uniformément répartie q, on trouve : $\boldsymbol{m = \frac{ql^2}{24}}$ ***et*** $\boldsymbol{m' = \frac{ql^2}{12}}$

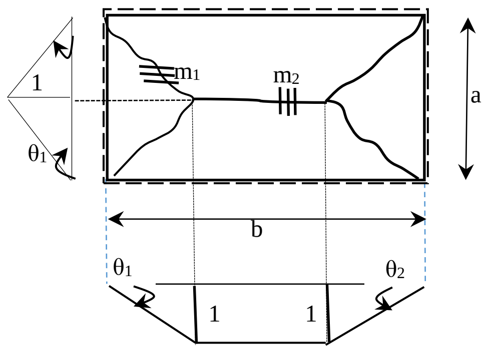


5/ Panneau de dalle rectangulaire appuyé sur son contour sous une q.

En nous appuyant sur les résultats des essais, nous déterminerons le mécanisme de ruine dans lequel les lignes de rupture se forment, suivant les bissectrices de chaque angle, tout en mobilisant des moments unitaires m1 et m^2.

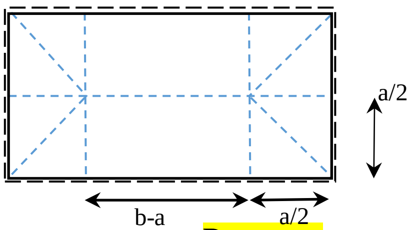
Les bissectrices des angles étant à 45°, on a :

$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{a/2} = \frac{2}{a}$



On a 08 triangles (égaux) et 02 rectangles (identiques).

Aire d'un triangle = a^2 / 8 et déplacement virtuel du c-d-g = 1/3.
Aire d'un rectangle = (b-a)a/2 et déplacement virtuel du c-d-g = 1/2.



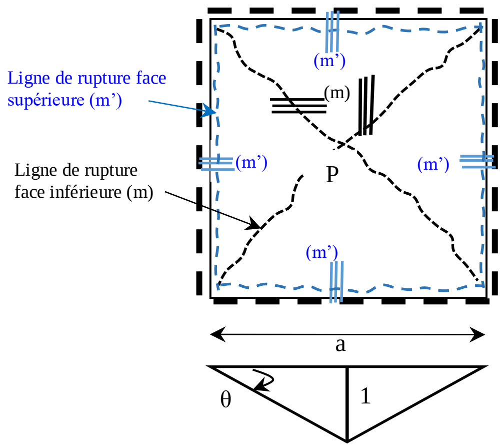
$W_e = q[8(a^2/8)(1/3) + 2(b-a)a/2(1/2)] = \mathbf{(3b-a)(qa/6)}$
$W_i = 2.m_1.\theta.a + 2.m_2.\theta.b = \mathbf{4[m_1 + m_2(b/a)]}$
$\mathbf{W_e = W_i}$
Donne :
$m_1(a/b) + m_2 = (qa^2/24)(3-a/b)$

Remarque : on retrouve $\mathbf{m = qa^2/24}$ pour un panneau de dalle carré isotrope (a = b et $m_1 = m_2$).

6/ Pour le panneau de dalle carré encastré sur son contour.
P charge ponctuelle au centre du panneau.
m = m'

Solution :

$\theta = \frac{1}{a/2} = \frac{2}{a}$
$W_e = P.1 = \mathbf{P}$
$W_i = 4(m+m')(2/a)(a) = \mathbf{16m}$
$\mathbf{W_e = W_i}$
On trouve : $\mathbf{m = P/16}$
Pour une bande de 1m.



7/ Panneau de dalle rectangulaire encastré sur son contour sous q.

$\theta_1 = \frac{2}{l}$; $\theta_2 = \frac{2}{\lambda L}$

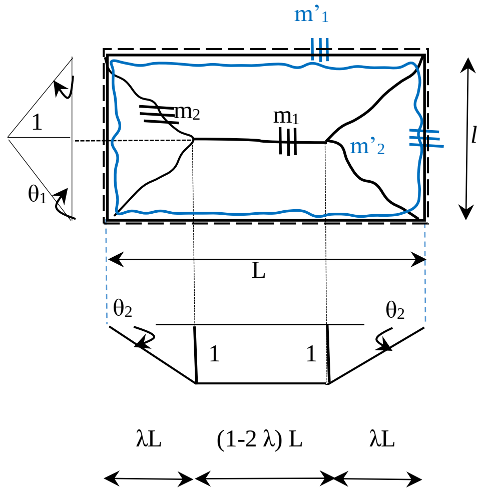
m_1: moment petite portée;

$m_2 = \mu m_1$: moment grande portée;

$m'_1 = \phi_1 m_1$ et $m'_2 = \phi_2 m_2$.

μ est compris entre 0.25 (pour une dalle portant dans un seul sens, $\alpha < 0.25$) et 1 pur une dalle carrée.

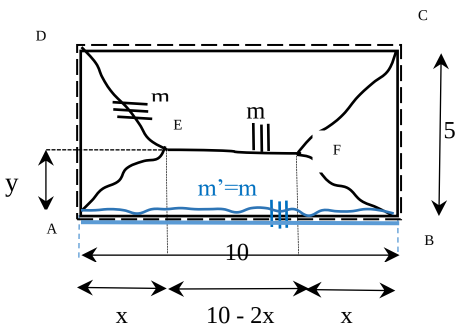
Le mécanisme de ruine cinématiquement admissible dépend de λ.



8/ Panneau de dalle rectangulaire encastré sur un côté et appuyé sur les tois autres côtés sous q.

Le mécanisme de ruine est défini par les paramètres x et y.

$\delta = 1$ sur la ligne EF.



W_e = [2(1/3)(5x) + 1/2 (5)(10-2x)] = **q(25 - 1,667x)**

W_i = ?

Énergie dissipée par les lignes de rupture (AE) et (BF) :

$$2m\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

Énergie dissipée par les lignes de rupture (DE) et (CF) :

$$2m\left(\frac{x}{5-y} + \frac{5-y}{x}\right)$$

Énergie dissipée par la ligne de rupture (EF) :

$$m\left(\frac{10-2x}{y} + \frac{10-2x}{5-y}\right)$$

Énergie dissipée par la ligne de rupture (AB) (face supérieure) :

$$m\left(\frac{10}{y}\right)$$

W_i = $10m\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{5-y}\right)$

$W_e = W_i$

On trouve : **$q(25 - 1{,}667x) = 10m\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{5-y}\right)$**

$\frac{q}{m} = \frac{10\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{5-y}\right)}{(25-1{,}667x)}$ on alors, deux conditions à satisfaire pour le mécanisme de ruine.

$$\frac{\partial(q/m)}{\partial x} = 0 \; et \; \frac{\partial(q/m)}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial(q/m)}{\partial y} = 0$ quand $\frac{\partial\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{5-y}\right)}{\partial y} = 0$ donc : $\frac{2}{y^2} + \frac{-1}{(5-y)^2} = \mathbf{0}$ donne <u>y = 2,93</u>

$\frac{q}{m}$ est maximum quand y = 2.93 et ce, quelle que soit la valeur de x. (Comme prévu, la valeur de y est supérieure à 5/2 en raison su moment d'encastrement du bord AB).

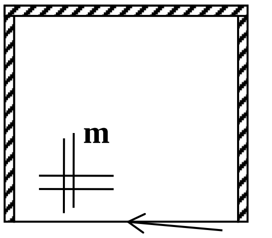
y = 2.93 donc, on a : $\frac{q}{m} = \frac{\left(\frac{10}{x}+11{,}657\right)}{(25-1{,}667x)}$ et $\frac{\partial(q/m)}{\partial x} = 0$ donne : <u>x = 2,82</u>

Et pour x = 2,82 et y = 2,93

<u>q = 0,75 m</u>

9/ Déterminer par le biais de la méthode des lignes de rupture le moment plastique m (pour une bande de 1 mètre) d'un panneau de dalle carré de côté *l*, soumis à une charge uniformément répartie q.

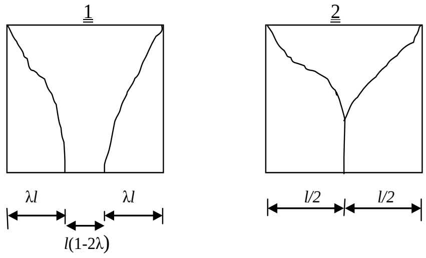
On considère les moments dans les deux directions égaux, $m_1 = m_2 = m$.



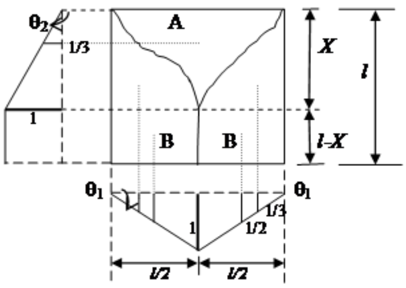
Panneau appuyé sur trois côtés

Bord libre

Dans ce cas nous avons deux mécanismes de ruine possibles (*voir figure suivante*). L'étude du mécanisme **1** (*déjà étudié*) ne peut se réaliser $\lambda > 0.5$.



Le mécanisme 2 se compose de deux trapèzes (B) et d'un triangle (A).
Le seul paramètre inconnu étant la valeur de *X*.
On a: $\theta_1 = 1/(l/2) = \frac{2}{l}$ et $\theta_2 = \frac{1}{X}$



$$\boldsymbol{W_{ext}} = \left[q\left(l.X.\frac{1}{2}\right).\frac{1}{3}\right] + 2\left[q(l-X).\frac{l}{2}.\frac{1}{2} + \left(X.\frac{l}{2}.\frac{1}{2}\right).\frac{1}{3}\right] = \boldsymbol{ql^2\left(\frac{1}{2} - \frac{X}{6l}\right)}$$

$$\boldsymbol{W_{int}} = (m_2.l.1/X) + 2\left(m_2.l\frac{2}{l}\right) = \boldsymbol{m_2\left(\frac{l}{X} + 4\right)}$$

En posant $\boldsymbol{W_{ext} = W_{int}}$

On a : $ql^2\left(\frac{1}{2} - \frac{X}{6l}\right) = m_2\left(\frac{l}{X} + 4\right) \Rightarrow \frac{m_2}{q} = l^2\left[\frac{3-\frac{X}{l}}{6\left(\frac{l}{X}+4\right)}\right]$ Et $\frac{\partial\left(\frac{m}{q}\right)}{\partial X} = 0 \Rightarrow X = 0.65l$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m_2 = \frac{ql^2}{14,14}}$$

Il faut plus d'armatures pour le panneau appuyé sur trois côtés pour avoir la même capacité portante que celui appuyé sur son contour.

Car, pour un panneau appuyé sur son contour on a : $m_1 = q.\frac{l^2}{24}$

$\Rightarrow q = \frac{24}{l^2}m_1$ et $m_2 = \frac{ql^2}{14,14} \Rightarrow q = \frac{14,14}{l^2}m_2 \Rightarrow \boldsymbol{m_2} = \frac{24}{14,14}m_1 = \boldsymbol{1,7.m_1}$