# Chapitre 2: Géométrie de la Programmation linéaire.

2.1 ① Espace Vectoriel:

Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ensemble E muni :

- d'une loi de composition interne + (addition)
- d'une loi de composition externe . (multiplication par un scalaire)

Ces lois doivent vérifier les axiomes suivantes:

① $(E,+)$ est un groupe abélien.

② $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x,y \in E : \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

③ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E : (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

④ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E : (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

⑤ $\forall x \in E : \quad 1x = x$

Exemples:

① $\mathbb{R}^n$, muni de l'addition $(x_i)+(y_i) = (x_i+y_i)$ et de la multiplication externe $\lambda(x_i) = (\lambda x_i)$ est un espace vectoriel

② L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, muni de l'addition des poly et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel.

③ L'ensemble des matrices $M_{n,m}(\mathbb{R})$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel.

② Rang de matrice:

Le rang d'une matrice représente la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes (ou lignes) c'est-à-dire le nombre maximal de vecteurs colonnes (ou lignes) linéairement independants de cette matrice. On le note par $rg(A)$ pour la matrice A.

Propriétés:

- $rg(A) = rg(A^T)$
- Le rang est invariant par opérations élémentaires.
- $\forall A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ ; $rg(A) \leq \min(n,m)$.

## Méthodes de calcul :

- Méthode du pivot de Gauss : On transforme la matrice en échelonnée réduite.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow rg(A) = 2$ (deux lignes non nulles).

- Par les déterminants : On cherche le plus grand mineur non nul.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

d'abord le déterminant de la matrice A, $\det(A) = 0$, donc le rang est inférieur à 3.

Vérifions les mineurs d'ordre 2, il y en a 9 au total.

On essaie de trouver au moins un mineur non nul, par ex. le mineur $M_{1,1} = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = -3 \neq 0$, donc le rang de A est 2.

## ③ Systèmes d'équations linéaires :

Soit un système linéaire de n équations à m inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \quad \dots \quad (*)$$

S'écrit sous forme matricielle : $Ax = b$ t.q $A = (a_{ij})_{n\times m}$, $b = (b_i)_{n\times 1}$.

- Le système (*) est dit compatible s'il admet au moins une solution. Il est dit incompatible dans le cas contraire.
- Le système (*) est homogène si $b = 0$.
- On appelle rang du système linéaire (*) le rang de la matrice A associée.
- Un système linéaire qui admet une solution unique est dit déterminé. S'il admet plusieurs solution, il est dit indéterminé.

- On dit que le système (*) est :
  - carré si $n=m$ ;
  - surdéterminé si $n>m$ ;
  - sous déterminé si $n<m$ ;
  - de rang maximal si $rg(A)=\min(n,m)$.

Ex. $\begin{cases} x+y=1 \\ x=0 \end{cases}$ est compatible, $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ ne l'est pas.

- Formule de Cramer :

- Si $n=m=rg(A)$, le système (*) est dit de Cramer, l'unique solution du système est $x=A^{-1}\cdot b$.
- Pour chaque $i$ compris entre 1 et $m$, soit la matrice $A_i$ obtenu en remplaçant la $i$-ième colonne de $A$ par la colonne $b$, et en laissant les autres inchangées, alors la solution du système est le $m$-uplet $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ avec $x_i=\det(A_i)/\det(A)$.

Théorème de Rouché-Fontené :

Un système $Ax=b$ est compatible si et seulement si $rg(A)=rg(A|b)$, où $(A|b)$ est la matrice augmentée.

Remarque :

- Un système homogène à $n$ équations et $m$ inconnues $Ax=0$ est toujours compatible.
- L'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m-rg(A)$
- Soit $x_p$ une solution particulière d'un système linéaire à $n$ équations et $m$ inconnues (S) : $Ax=b$.
Pour toute solution $x_h$ du système homogène associé $Ax=0$ $x_p+x_h$ est une solution de (S).
- L'ensemble des solution de (S) s'écrit donc :

$$\{x_p+x_h \,/\, Ax_h=0\}.$$

Ex L'ensemble des solutions du système d'équation à 3 inconnues :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
En fait, on a $x_1 = -x_2 - x_3$ ce qui signifie que $x_1$ est déterminé par $x_2$ et $x_3$. Ainsi, les variables $x_2$ et $x_3$ sont libres, et l'ensemble des solutions est paramétré par ces deux variables :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc les solutions forment un plan dans $\mathbb{R}^3$ :

$$S = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\}$$

le rang du système est : $\mathrm{rg}(A) = 1$, donc la $\dim(S) = 3 - 1 = 2$.

## 2.2 ① Ensembles convexes et résolution graphique :

- **Combinaisons Algébriques :**

Une combinaison algébrique est une somme pondérée de vecteurs avec des contraintes spécifiques sur les coefficients, exprimée de la manière suivante :

- **combinaison linéaire :** soit $E$ un $\mathbb{R}$-e.v :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ tq } x_i \in E \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

- **combinaison affine :**

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ tq } x_i \in E \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

- **combinaison convexe :**

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ tq } x_i \in E \text{ avec : } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 ; \lambda_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,n}.$$

- **Combinaison Conique :**

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ tq } x_i \in E \text{ avec } \lambda_i \geq 0 ; \forall i = \overline{1,n}.$$

- **Ensemble affine :** Un ensemble est affine s'il est fermé par des combinaisons affines ; c-à-d : $A$ est affine ssi
$\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ; $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$.

- **Remarque :** Dans le domaine de P.L, on utilise le terme "ensemble affine" au lieu de terme "sous-espace affine".

Ex.

- une droite $l = \{x + \lambda(y-x) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un ensemble affine.
- donnée $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ ; l'hyperplan :
$$H \equiv H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a^T x + b = 0\}$$ est un ensemble affine.
- En général, étant donné $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ : l'ensemble solution du système d'équations linéaire
$$S = \{x \in \mathbb{R}^m \,/\, Ax = b\}$$ est un ensemble affine.

• Notez que si $n=1$, l'ensemble des solutions $S$ est un hyperplan. Si $n>1$ et $A\neq 0$, $S$ est l'intersection de $n$ hyperplans.

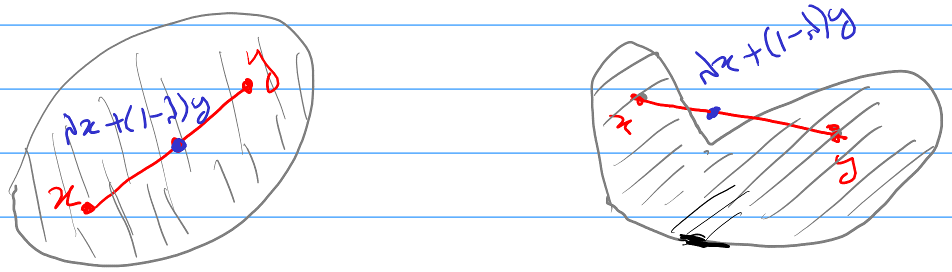
**Proposition :** Tout ensemble affine de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble solution d'un système d'équations linéaires.

**Exercice :** Montrer que si $A$ est affine contenant $0$, c'est un sous-espace vectoriel.

• **Enveloppe affine :** L'enveloppe affine d'un ensemble $S$, notée $\mathrm{aff}(S)$, est le plus petit ensemble affine contenant $S$.

$$\mathrm{aff}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;/\; x_i \in S \text{ et } \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

• **Ensemble convexe :** Un ensemble est convexe s'il est fermé par des combinaisons convexes, c-à-d :
$A$ est convexe ssi : $\forall x, y \in A$ ; $\forall \lambda \in [0,1]$ : $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$.

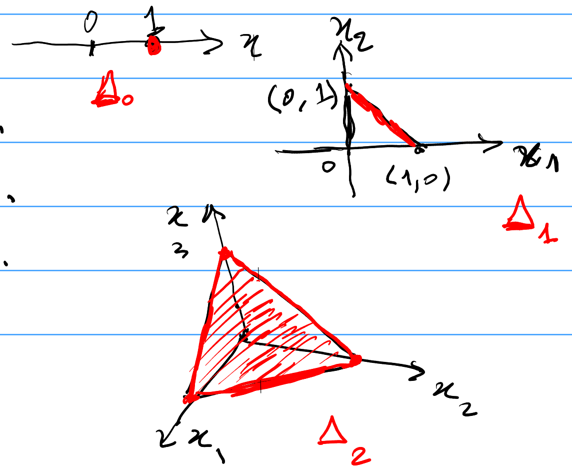



ensemble convexe

ensemble non convexe

**Ex :** $n$-simplexe de $\mathbb{R}^{n+1}$ est un convexe :
$$\Delta_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; \sum_{i=1} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \;;\; i=\overline{1,n} \right\}$$

**Rem.** En particulier ;
le 0-simplexe est just un pt.
le 1-simplexe est un segment.
le 2-simplexe est un triangle.
le 3-simplexe est un tétraèdre.



Exercice: Montrer qu'une combinaison convexe de (n) pts. peut être calculée récursivement par (n-1) combinaisons convexe de deux pts.

Opérations préservant la convexité:

- l'intersection des ensembles convexe est convexe.
- si $C$ est convexe, $\forall a \in E$, le translaté $a+C := \{a+x \,/\, x \in C\}$ est convexe.
- si $C$ est convexe, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'homothétique $\lambda C := \{\lambda x \,/\, x \in C\}$ est convexe.
- L'image d'un convexe par une application affine est convexe.
- L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.
- La somme vectorielle de deux convexe $C_1$ et $C_2$ :
  $$C_1 + C_2 := \{x_1 + x_2 \,/\, x_1 \in C_1 \text{ et } x_2 \in C_2\} \text{ est convexe.}$$
- Le produit cartésien de deux convexe $C_1$ et $C_2$ :
  $$C_1 \times C_2 := \{(x_1, x_2) \,/\, x_1 \in C_1 \text{ et } x_2 \in C_2\} \text{ est convexe.}$$
- L'union de convexes n'est pas convexe en général.

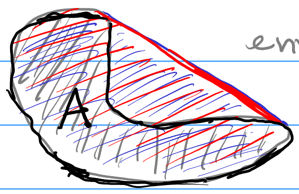
Exercice: Montrer qu'étant donné un convexe $C$ et deux réels positifs $\lambda$ et $\mu$, alors $\lambda C + \mu C = (\lambda+\mu) C$.

- Enveloppe convexe: L'enveloppe convexe d'un ensemble $S$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points dans $S$, à savoir :
  $$\operatorname{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,/\, x_i \in S,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0;\ i = \overline{1,n} \right\}$$

Remarque: L'enveloppe convexe d'un ensemble est le plus petit convexe qui contient.

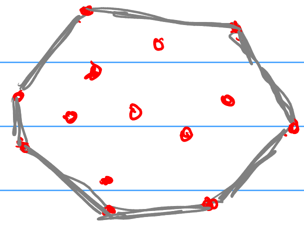
Théorème (Caratheodory): Dans un espace vectoriel de dimension $n$ l'enveloppe convexe d'un ensemble $A$ est égale à l'ensemble des combinaisons convexe de $(n+1)$ pts. de $A$. i.e.;

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcup_{x_i \in A} \operatorname{conv}(\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\})$$




enveloppe convexe (hachurée en rouge) d'un ensable (hachurée en gris)

conv(A)



conv(A)

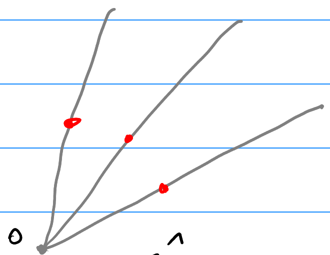
enveloppe convexe d'un ensemble discret.

- **Cônes convexes :**

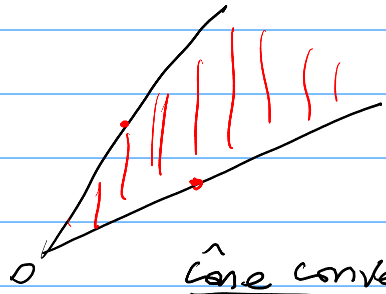
**Définition :** Un ensemble $C$ est un cône si :

$$\forall x \in C,\ \forall \lambda \geq 0\ ;\ \lambda x \in C.$$

Un cône est donc une union de demi-droites fermées issues de l'origine




cône non convexe



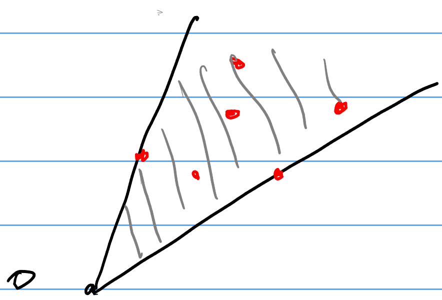

cône convexe

**Exercice :** Montrer qu'un cône $C$ est convexe ssi il est stable par addition, c'est-à-dire que :

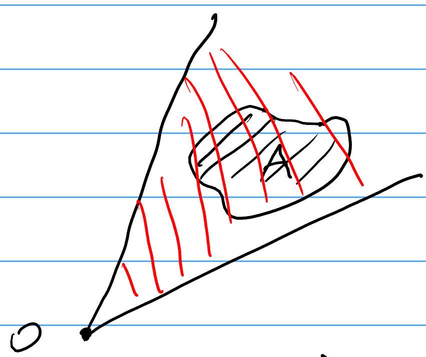
$$\forall x \in C,\ \forall y \in C : x + y \in C.$$

- **Enveloppe Cônique :**

**Déf :** L'enveloppe cônique d'un ensemble $A$ est le plus petit cône convexe qui contient $A$. Elle notée $\text{cone}(A)$.



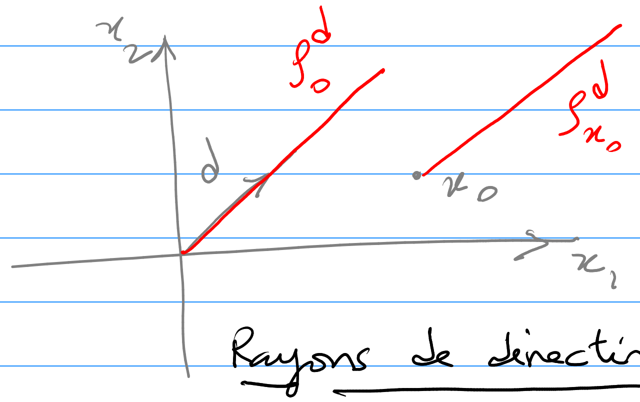

cone(A)




cone(A)

enveloppe cônique.

**Déf :** Pour $x_0, d \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\rho_{x_0}^d = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x = x_0 + \lambda d,\ \lambda \geq 0\}$ est la demi-droite issue du pt. $x_0$, parallèle au vecteur $d$.
L'ensemble $\rho_{x_0}^d$ est appelé rayon de sommet $x_0$ et direction $d$.
lorsque $x_0 = 0$, le rayon $\rho_0^d$ a pour sommet l'origine.




Rayons de direction $d$

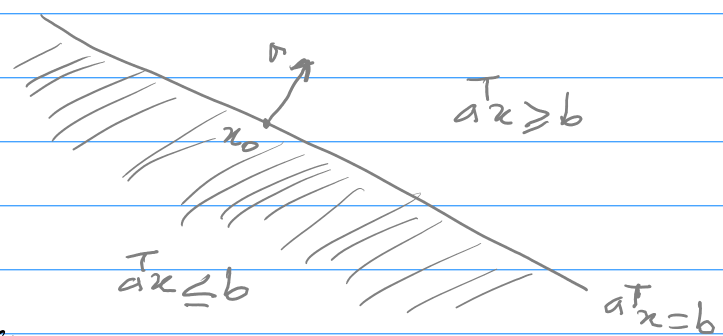
**Prop.** Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est un cône si le rayon $\rho_0^x \subset C$ pour tout $x \in C$.

- **Demi-espace**

**Déf :** Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$, on appelle :

- Demi-espace positif fermé, l'ensemble $H_{a,b}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a^T x \geq b\}$.
- Demi-espace négatif fermé, l'ensemble $H_{a,b}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a^T x \leq b\}$.
- Demi-espace positif ouvert, l'ensemble $\mathring{H}_{a,b}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a^T x > b\}$.
- Demi-espace négatif ouvert, l'ensemble $\mathring{H}_{a,b}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a^T x < b\}$.

**Rem.** les demi-espaces sont convexes.

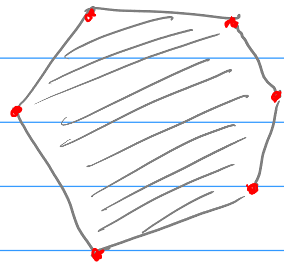



L'hyperplan $\{a^T x = b\}$ détermine deux demi-espace

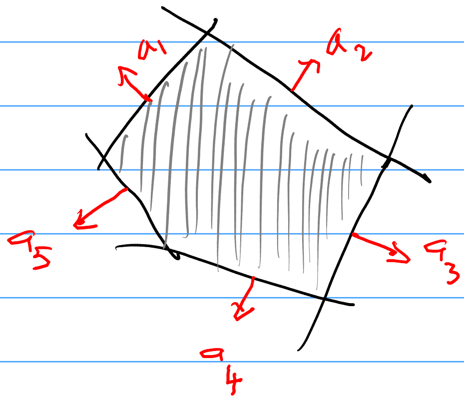
**Déf**: L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^n$ est appellée Polyèdre

**Déf**: On appelle Polytope, un polyèdre borné (c'est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$).

**Rem**: L'ensemble des combinaisons convexes de n pts. isolés est un polytope.



Un polytope à six sommets dans $\mathbb{R}^2$




Polyèdre (en grisé) est l'intersection de cinq demi-espaces avec des vecteurs normaux extérieurs $a_1, a_2, \dots, a_5$.

**Ex.**

- L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n est noté $S_n$, défini comme : $S_n = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} / M^T = M\}$.

Cet ensemble forme un $\mathbb{R}$-e.v de dim $= \frac{n(n+1)}{2}$.

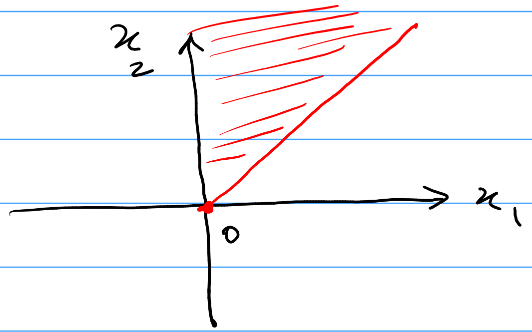
• On utilise la notation $S_n^+$ pour désigner l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives, de plus, on utilise la notation $S_n^{++}$ pour représenter l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

• Les ensembles $S_n^+$ et $S_n^{++}$ sont convexes.

**Déf:** Un cône polyédral est un polyèdre dont tous les hyperplans de définition passent par l'origine ; c-à-d de la forme :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax \leq 0\}, \text{ où } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

**Ex:** $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 - x_2 \leq 0\}$

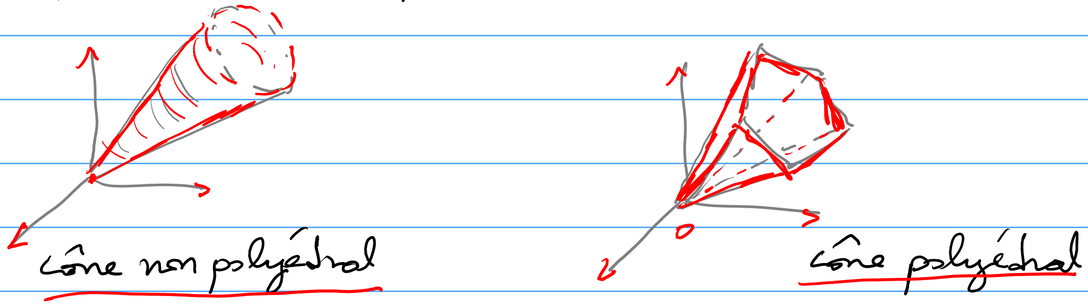



**Rem:** • Un cône non polyédral ne peut pas être représenté par un nombre fini d'inégalités linéaires.

• Un exemple classique est le cône de Lorentz

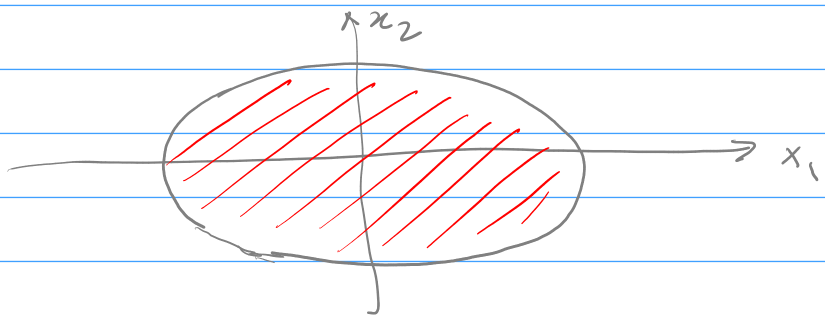
$$L = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_0 \geq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

• Le cône polyédral a des "faces plates" et des "arêtes" distinctes tandis que le cône non polyédral a une surface "lisse".



**Ex.** L'ellipsoïde $\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x^T A^{-1} x \leq 1\}$ avec $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ est convexe

- dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{E}_A = \{(x_1, x_2) \,/\, \frac{x_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{x_2^2}{\lambda_2^2} \leq 1\}$, t.q. $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

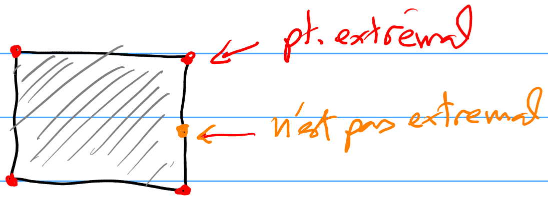



Ellipsoïde dans $\mathbb{R}^2$ (Ellipse pleine)

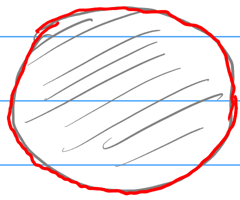
## • Point extrémal :

**Déf :** Soit A un convexe d'un $\mathbb{R}$-e.v E. On dit qu'un pt. $x$ de A est un pt. extrémal (ou pt. extrême) de A si toute égalité
$$x = \lambda y + (1-\lambda) z, \text{ avec } y, z \in A \text{ et } \lambda \in [0,1], \text{ entraîne}$$
$$x = y \text{ ou } x = z.$$

**Ex.**




L'ensemble des pts extrémaux d'un carré est constitué par les 4 sommets du carré.



L'ensemble des pts. extrémaux d'un disque est le cercle qui ferme ce disque.

**Prop.** Soit A un convexe de E (e.v.). $x^* \in A$ est un pt. extrémal ssi $A \setminus \{x^*\}$ est convexe.

**Prop** L'ensemble des pts. extrémaux d'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est non vide.

**Déf:** Soit $C$ un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et $F \subset C$ convexe fermé lui aussi. On dit que $F$ est une face de $C$ si quels que soient $x_1, x_2 \in C$ et $\lambda \in (0,1)$; si $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F$ alors nécessairement $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$.

**Thm.** (Krein-Milman) : tout convexe compact non vide d'un e.v normé est enveloppe convexe de ses pts. extrémaux.

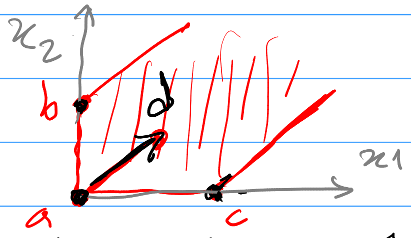
**Déf** Soit $A$ un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, un vecteur $d \in A$ $(\neq 0)$ est appelé direction de $A$ si $\forall x_0 \in A$, le rayon $\delta_{x_0}^d$ est inclus dans $A$.

**Déf:** Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide. Un pt. $d \in A$ $(\neq 0)$ est appelé direction extrême de $A$ s'il ne peut être combinaison conique de deux direction distinctes, c-à-d

$$\left(d = \lambda d_1 + \mu d_2 \text{ avec } d_1, d_2 \text{ deux directions de } A;\ \lambda, \mu > 0\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(d_1, d_2 \text{ sont colinéaires.}\right)$$




Points et dir. extrêmes

**Prop** Soit $F = \{x_0 + \lambda a \mid \lambda \geq 0\}$ une demi-droite, où $x_0, a \in \mathbb{R}^n$ si $F$ est une face d'un convexe $A$, alors $a$ est une direction extrémale de $A$

**Ex.** Considérons le cône convexe $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\}$

- Montrer que $d = (1,1)$ est une direction extrême de $A$.

**Ex** Soit $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \geq 0$

- Montrer que $d = (1,1)$ est une direction extrême de $A$.