Université Larbi Ben Mhidi — Niveau : 1ère année Master AD

Département MI — Module : Méthodes algorithmiques

Année : 2024-2025

TP 2 : Diviser pour régner

Multiplication de Polynômes avec la Méthode de Karatsuba

Contexte et Objectif

La multiplication classique de grands nombres ou polynômes, réalisée par l'approche naïve, requiert une complexité en $O(n^2)$, où n est le nombre de chiffres ou le degré des polynômes. La méthode de Karatsuba, développée en 1962, utilise le paradigme "Diviser pour régner" pour optimiser ce calcul, réduisant le nombre de multiplications nécessaires et améliorant la performance globale de l'algorithme.

Principe de la Méthode de Karatsuba

Soient deux polynômes P(x) et Q(x) que l'on souhaite multiplier. En divisant chacun de ces polynômes en deux parties, le calcul de leur produit peut être simplifié. Supposons que les polynômes P(x) et Q(x) sont représentés sous forme d'entiers :

1. **Décomposition des termes** :
   Si P(x) et Q(x) sont de degré n, on peut les exprimer comme :

   $$P(x)=A\cdot 10^{n/2}+B$$

   $$Q(x)=C\cdot 10^{n/2}+D$$

   où A et B représentent les parties hautes et basses des coefficients de P(x), et C et D ceux de Q(x).

2. **Équation de Produit** :
   Le produit de P(x) et Q(x) peut alors s'écrire comme :

   $$P(x)\cdot Q(x)=(A\cdot 10^{n/2}+B)(C\cdot 10^{n/2}+D)$$

   En développant cette expression, on obtient :

   $$P(x)\cdot Q(x)=A\cdot C\cdot 10^{n}+(A\cdot D+B\cdot C)\cdot 10^{n/2}+B\cdot D$$

3. **Optimisation avec la Méthode Karatsuba** :
   La méthode de Karatsuba permet de réduire le nombre de multiplications en calculant trois sous-produits seulement :

   - $a=A\cdot C$
   - $d=B\cdot D$
   - $e=(A+B)\cdot(C+D)-a-d$

   Le produit final peut être alors réécrit comme :

   $$P(x)\cdot Q(x)=a\cdot 10^{n}+e\cdot 10^{n/2}+d$$

   Cette formule utilise seulement trois multiplications au lieu de quatre dans l'approche classique, améliorant ainsi l'efficacité du calcul.

   Travail demandé

   Implémenter l'algorithme de Karatsuba pour multiplier deux polynômes