جامعة محمد بوضياف بالمسيلة

كلية الرياضيات والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

دروس في تاريخ الرياضيات

لطلبة السنة الثانية رياضيات

إعداد الأستاذ

سعدي عبد الرشيد

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف بالمسيلـــة
كـــليـة الرياضيات و الإعـلام الآلـــي

قسم الرياضيات | اللجنة العلمية

رقم: 139/ق.ر/2023 | المسيلة في: 03- 07 - 2023

مستخلص محضر اللجنة العلمية ليوم: 2023/07/03
بخصوص اعتماد مطبوعة دروس

وافقت اللجنة العلمية على اعتماد مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ **سعدي عبد الرشيد** المعنونة بـ:

دروس في تاريخ الرياضيات

كمرجع للدروس لطلبة **السنة ثانية رياضيات.**

وهذا بعد الاطلاع على التقارير الإيجابية للأستاذ الخبير المكلف بالمطبوعة.

رئيس اللجنة العلمية

رئيس اللجنة العلمية لقسم الرياضيات
رئيس اللجـنـة العلمـية
لقسم الرياضيـات
مرزوقي عبد الكريم

سلمت هذه الشهادة للمعني لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

جامعة محمد بوضياف بالمسيلة

كلية الرياضيات والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

دروس في تاريخ الرياضيات

لطلبة السنة الثانية رياضيات

إعداد الأستاذ

سعدي عبد الرشيد

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

خلال الموسمين الدراسيين 2011- 2012 و 2012 – 2013 تم تكليفي من إدارة قسم الرياضيات بتدريس مقياس تاريخ الرياضيات الموجه للسنة الثانية ليسانس رياضيات (السداسي الثالث)، فوافق ذلك هوى في نفسي، خصوصا وأن لي محبة للتاريخ بصفة عامة، ولتاريخ المفاهيم الرياضية بصفة خاصة، بالإضافة إلى كوني درست تاريخ الرياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة على يد الأستاذ يوسف قرقور رحمه الله تعالى.

كانت المشكلة تكمن في ان البرنامج لم يكن محددا بالتفصيل، مما يعني أن علي الاجتهاد في المحاور مع كوني غير مختص في تاريخ الرياضيات، لذا شرعت في جمع مختلف المراجع والجذاذات والبحوث التي طالتها يدي، فكان أن تكونت هذه المطبوعة التي ليس لي منها إلا الجمع والترتيب، لأن التأليف يحتاج إلى بحث أكثر من متخصص، مع تحري الدقة في التحرير والكتابة.

لقد تعلمنا خلال دراستنا التدرجية بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة أن وضع المفهوم الرياضي في سياقه التاريخي يعين الباحث على تطوير المفهوم، كما يعين المشتغل على تحرير البرامج المدرسية على معرفة الحواجز والصعوبات التي رافقت المفهوم خلال مسيرته التاريخية، مما يحذو به إلى اعتماد مقاربات تجتاز هذه الحواجز وتحرير مفاهيم متدرجة تراعي المستويات المختلفة.

لم يكن الاهتمام بتاريخ الرياضيات أمرا محليا خاصا بالعرب، بل هو اهتمام عالمي، حتى أنه يعتبر من علوم الآلة الخاصة بتعليمية الرياضيات، حيث إن الإبستمولوجيا تعتمد بشكل أساسي على تاريخ العلوم.

غير أن ما يعاب على كثير من الغربيين الذين يكتبون في تاريخ الرياضيات إهمالهم عن قصد أو عن غير قصد لإسهامات الحضارة العربية الإسلامية في تطور الرياضيات وسائر العلوم، والذي يذكر منهم هذه الإسهامات يجعلها في مساق حركة عبور المفاهيم من الحضارة اليونانية نحو عصر النهضة، وهذا الإجحاف يخب بالأمانة العلمية التي يدعيها هؤلاء. وإن من أعجب ما قرأته ما كتبه أحد الروس في مقدمة كتابه ما يوحي بأن

الخوارزمي وعمر الخيام تابعان للاتحاد السوفياتي ، فالخوارزمي أوزبكي وعمر الخيام طاجيكي، وكلاهما من آسيا الشرقية، وهكذا لا وجود لأي اثر للحضارة العربية الإسلامية في انمتائهما حسبما يدعيه هذا الباحث.

إن هذا الأمر يصلح أن يكون حافزا للباحثين العرب والمسلمين أن يخرجوا هذه الكنوز القديمة للنور، وأن يبحثوا فيها ويوثقوا إسهام العرب والمسلمين، وقد تم ذلك فعلا فقد تم طبع كتاب الجبر والمقابلة للخورازمي، والباهر في الجبر للسموأل، ومفتاح علوم الحساب للكاشاني، وغير ذلك.

كان الأستاذ يوسف عتيق رحمه الله تعالى مهتما بالسياقات التاريخية، وكان الأستاذ يوسف قرقور رحمه الله تعالى مهتما بتوثيق النصوص التاريخية، حريصا على الدقة، هيابا في اتخاذ الأحكام، وكان اهتمامه منصبا على الحضارة العربية الإسلامية، فقد كانت رسالة الماجستير الخاصة به حول أعمال ابن قنفذ القسنطيني، أما أطروحة الدكتوراه فقد كانت حول أعمال المؤتمن بن هود، وقد استفدت من أعماله كثيرا في تحرير هذه المطبوعة.

لقد تم تحرير هذه المطبوعة للتغطية على جوانب من فروع الرياضيات: الجبر، الحساب، الهندسة، حساب المثلثات، الإحصاء والاحتمالات، وأخيرا التحليل، ولا أدعي الاستيعاب، نظرا للقصور الذي يعتري البشر، بالإضافة إلى كوني غير متخصص، لكن هذا لا يمنع من أن أساهم ولو بقسط ضئيل في التعريف ببعض جوانب التطور التاريخي للمفاهيم الرياضية.

ومن المؤكد أن في العمل نقائصَ، فرحم الله امرَءًا رأى شعثا فلمّه، أو خللا فسدّه، أو نقصا فأتمه، فلعله أن يوفيَ بالمقصود منه – وهو تمام الفائدة المأمولة – فإن الناس: "**إما رجل سبق إلى ما لم يكن مُستخرَجا قبله، فوَرَّثه مَن بعدَه، وإما رجل شرح مما أبقى الأولون ما كان مُستغلَقا، فأوضح طريقه، وسهَّل مسلكه، وقرب مأخذه، وإما رجل وجد في بعض الكتب خللا، فلمّ شعثه، وأقام أودَّه، وأحسن الظن بصاحبه، غير رادٍّ عليه، ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه**"(من مقدمة كتاب الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى الخوارزمي).

وبالله العصمة والتوفيق

المسيلة ليلة الأربعاء منتصف عام شعبان عام 1444 هـ الموافق لـ 08 مارس عام 2023 م.

لمحة تاريخية عن أهم الحضارات

أولا: الحضارة البابلية:

تمتد فترة الحضارة البابلية من 3500 ق.م إلى 60 ق.م، وقد ظهرت النصوص الرياضية الأولى في المرحلة الأكادية (3000 ق.م – 2000 ق.م)، وظهرت بها جداول رياضية فيها أعداد.

كان البابليون يكتبون على الألواح الطينية (وتدعى كتابتهم بالمسمارية)، وأول من أعطى تحليلا ودراسة مقارنة وترجمة لنصوص رياضية بابلية هو المؤرخ الألماني أوتو نيقباور (Otto Negubeaur) سنة 1930م، تلاه المؤرخ الفرنسي تيرو دونجان (F. Thureau – Dangin)، وغيره.

وقد كان البابليون يمتلكون معارف في الهندسة (مساحة بعض الأشكال الهندسية، بعض العلاقات كالعلاقة المنسوبة لفيثاغورس)، ولهم مسائل في الحساب والفلك.

ثانيا: الحضارة المصرية:

تمتد الحضارة المصرية القديمة من 3000ق.م إلى 670م تميزت مرحلة المملكة الوسيطة (2200 ق.م – 1600 ق.م) بظهور أول الوثائق المتعلقة بالرياضيات، وقد عثر على أول وثيقة في هذا الميدان سنة 1858 م، وهي وثيقة تدل على النشاط الرياضي المصري، اكتشفت من طرف مصري، واشتراها منه الإنجليزي ألكساندر ريند (A.Rhind)، ونشرت سنة 1898 م.

كان المصريون يكتبون على الرق (ورق البردي)، وهو ورق خاص مصنوع من القصب، ويكتب عليها من الجهتين، وتسمى الكتابة المصرية بالكتابة الهيروغليفية.

ثالثا: الحضارة الصينية:

يبدأ تاريخ الصين بظهور خمسة أباطرة أسطوريين اعتبرهم الصينيون آلهة وعبدوهم، ونسبوا إليهم كشف الزراعة وتنظيم الري وابتكار الأدوات الزراعية، والمركبات ذات العجلات والقوارب وغيرها من المنجزات الحضارية، ثم تلاهم الإمبراطور ياو أول حاكم للصين (2357ق.م – 2256 ق.م) وخلف هذا الحاكم وزيره شون (2256ق.م – 2206 ق.م) الذي خلفه الإمبراطور يو مؤسس أول أسرة مالكة صينية عرفت باسم هسيا لبثت تحكم حتى عام 1766ق.م وخلفتها أسرة شانج وتعرف كذلك بأسرة ين التي بدأ حكمها عام 1766 ق.م وانتهى عام 1123 ق.م.

ويعتبر عام 221 ق.م بداية تفجر طاقات الصين الإبداعية في الميدان الاجتماعي والاقتصادي، وتتميز فترة الدول المتحاربة بنشاط فلسفي لا تجد له نظيرا في العالم اللهم إلا في اليونان القديمة، فكان آلاف الأساتذة ممن ينتسبون إلى مختلف المدارس الفلسفية يقطعون البلاد طولا وعرضا يعرضون خدماتهم الفلسفية على مختلف الحكام.

تعتبر الكتابة الصينية أقدم الكتابات التي ظلت حتى يومنا هذا، فبنيتها لم تطرأ عليها إلا تغيرات سطحية منذ ظهورها من نحو أربعة آلاف عام مضت. وتعتبر الكتابة الصينية الشكل المثالي لكتابة الكلمات المصورة فهي تستعمل حرفاً واحداً أو رسماً واحداً لكل كلمة وكثيرا ما تدمج علامتان لتؤلفا كلمة مركبة، وهناك الآلاف من الحروف.

كان الصينيون يمتلكون معارف في الفلك والكيمياء والهندسة والطب وغيرها، ومما ينسب إلى الصينيين اختراع الطباعة، وكتابتهم منقوشة على أحجار ليسهل نسخها.

وقد تم التدليل على وجود رياضيات صينية عند اكتشاف حفريات في سنة 1889م، ومن ذلك الحين اشتغل الباحثون في تتبع الرياضيات الصينية، والتي من أهمها الحساب والجبر والهندسة.

رابعا: الحضارة اليونانية:

تمتد الحضارة اليونانية من 600ق.م إلى 300م، وتعتبر المرحلة الهللينية الأولى (320 ق.م – 120 ق.م) من أغزر المراحل إنتاجا، ففيها ظهر إقليدس (Euclid) وأبولونيوس (Apollonius) وأرخميدس (Archimède)،

وهم من أشهر حكماء اليونان، وقد ظهرت في الحضارة اليونانية المدرسة الفيثاغورسية، كما ظهر علم العدد، وتتميز الحضارة اليونانية أيضا بظهور البرهان، والنظام البديهي، الذي احتواه كتاب الأصول لإقليدس أهم موروث في هذه الحضارة.

كانت الأبجدية اليونانية من أصل فينيقي، مضافا لها الحروف المتحركة (les voyelles).

خامسا: الحضارة الرومانية:

لم يكن للرومان تأثير يذكر في الرياضيات، وكل ما يمكن أن يقال عن الرومان أمران اثنان:

1) اشتغالهم بموضوع النسبة الذي جاء كنتيجة لاهتمامهم بالفوائد والمواريث، وما نجم عن ذلك من مسائل حسابية.

2) نظام العد الروماني الذي بقي مستعملا إلى الآن في ترقيم الفصول في الكتب الأوربية، وكتابة الأرقام في بعض الساعات، وغيرها.

سادسا: الحضارة الهندية:

لقد ساهم الهنود مساهمة فعالة في الرياضيات، وقدموا للعالم قضايا لها أثرها وقيمتها، وأهم ذلك نظام العد.

لم نكن – إلى وقت قريب – نعرف عن الحضارة الهندية إلا بعض المعارف الخاصة بالتصوف والديانات الخرافية (مثل عقيدة البراهمة والفلسفة الخاصة بها).

وقد كانت المعارف الهندية تكتب بلغة قديمة تدعى السنسكرية، وهي لغة اندثرت حاليا.

ومن موروثات الحضارة الهندية كتاب السند هند "سندا هنتا"، لمؤلفه براهما قوبطا، وهو كتب يعالج مسائل في الفلك والرياضيات.

سابعا: الحضارة العربية الإسلامية:

الرياضيات العربية هي مجموع الإنتاج الرياضي المدون باللغة العربية، في نطاق الحضارة العربية الإسلامية. وقد مرت الحضارة العربية بأربع مراحل هامة:

1) مرحلة الترجمة: وتبدأ من القرن 8م، واستمرت حتى القرن 10م. وفي هذه المرحلة ترجمت مجموعة من الكتب الهندية واليونانية إلى العربية مباشرة، أو انطلاقا من ترجمات فارسية وسريالية. وقد كان ذلك خاصة في عهد الخليفة العباسي أبي جعفر المنصور، ثم في عهد الخليفة هارون الرشيد، وابنه عبد الله المأمون. ومن أبرز المترجمين:

* **حجاج بن يوسف بن مطر (ت 833م)**: نقل كتاب الأصول لإقليدس (Euclid)، وكتاب المجسطي لبطليموس (Ptolmy).

* **ثابت بن قرة الحراني الصابي (834 م □ 901 م)**: نقل وأصلح كتبا منها: كتاب الأصول، المدخل إلى علم العدد لنيقوماخاوس، كتاب الكرة والأسطوانة لأرخميدس.

* **إسحاق بن حنين (ت 911م)**: ومما نقله: كتاب الأصول، كتاب الكرة والأسطوانة، كتاب المجسطي.

* **قسطا بن لوقا البعلبكي (ت 910م)**: ترجم كتاب المدخل إلى علم العدد لديوفونطس (Diophante).

2) مرحلة الإبداع والابتكار: وفيها تم إعداد لغة رياضية عربية، وذلك بين القرنين 9م و 13م. وفي هذه المرحلة ظهرت مدرسة الخوارزمي، وأبي كامل المصري، ثم مدرسة عمر الخيام.

3) مرحلة نقل العلوم إلى أوربا: وقد تم فيها نقل مجموعة من الأدوات الجديدة، والكتب الكلاسيكية إلى أوربا، خلال الفترة الممتدة من القرن 12م إلى القرن 16م. وقد ساهم في ذلك بشكل كبير مدرسة الغرب الإسلامي (ابن البنا وابن قنفذ وغيرهما).

4) مرحلة الجمود: وقد توقفت أنشطة البحث تقريبا ابتداء من القرن 13م.

ثامنا: انتقال العلوم إلى أوربا:

كان لمدرسة الغرب الإسلامي أثر كبير في انتقال العلوم إلى أوربا، وخاصة حضارة الأندلس التي كانت قائمة على جزء من القارة الأوربية (شبه جزيرة إيبيريا).

وقد كانت بالمغرب جامعات، منها: جامعة بجاية التي درس بها الرياضي الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي (Fibonacci) (1170م – 1240م)، والذي سافر كثيرا عبر البحر الأبيض المتوسط، بهدف تعلم طرق الحساب المستعملة في الشرق، والعلاقات الرياضية المستخدمة في بناء أهرامات الجيزة. وعند عودته إلى إيطاليا ألف عدة كتب. ويرجع له الفضل في تعريف الغرب بالأرقام العربية، بما فيها الصفر.

نبذة عن تاريخ الحساب ونظرية الأعداد

أولا: الحضارة البابلية:

نظام العد عند البابليين ستيني، عشري، مختلط، وضعي (بمعنى أن وضعية الأرقام مهمة عند كتابة العدد)، ولقد كان البابليون سباقين إلى اختراع وضعية الأرقام (التي تسود نظامنا العشري الحالي).

للبابليين رمزان فقط لكتابة أي عدد وهما: ∇ للوحدات (1، 60، 60^2 ...) و ≺ للعشرات. ولكتابة أي عدد نحوله أولا إلى النظام الستيني، ثم نستعمل الرموز السابقة.

مثلا: $17164 = 4 + 46 \times 60 + 4 \times 60^2$

وكتابته البابلية: ∇∇∇∇ ≺≺≺≺∇∇∇∇∇∇ ∇∇∇∇.

4 46 4

عرف البابليون مفهوم الكسر بمعنى الجزء (الجزء من الواحد كالنصف والثلث والربع ...)، وأنشأوا لذلك جداول. فمثلا:

≺≺≺ يمثل 30 كما يمثل أيضا نصف $\frac{1}{2}$.

≺≺ يمثل 20 كما يمثل أيضا ثلث $\frac{1}{3}$.

∇∇∇∇∇ ≺ يمثل 15 كما يمثل أيضا ثلث $\frac{1}{4}$.

وقد وجد في هذ الجدول فجوات، فمقلوبات 7، 11، 13 غير موجودة في الجدول، لكنهم لحساب $\frac{1}{13}$ مثلا يكتبون: $\frac{1}{13}=\frac{7}{91}=7\times\frac{1}{91}\simeq 7\times\frac{1}{90}$، ومقلوب 90 موجود في الجدول.

ثانيا: الحضارة المصرية:

نظام العد عند المصريين عشري غير وضعي (وضعية الأرقام غير مهمة)، وهو يعتمد على الرموز:

ا يمثل الوحدات ∩ يمثل العشرات

𓍢 يمثل المئات 𓆼 يمثل الآلاف

𓂭 عشرات الآلاف 𓆐 مئات الآلاف

𓁨 يمثل مليون، وهو أكبر عدد.

فمثلا العدد 1456 يكتب كما يلي:

|||||| ∩∩∩∩∩ 𓍢𓍢𓍢𓍢 𓆼

عملية الجمع عند المصريين هي ضم الأعداد، وعملية الطرح هي اختصار الأعداد، والضرب هو عملية تضعيف ثم جمع، أما القسمة فهي (عملية تنصيف مع التحفظ على المصطلح).

ضرب 7 في 15	**قسمة 104 على 8**
1 15 2 30 4 60 8 120 بما أن 4+2+1 = 7 فإن $15 \times 7 = 15 + 30 + 60 = 105$	104 1 52 $\frac{1}{2}$ 26 $\frac{1}{4}$ 13 $\frac{1}{8}$ $104 \div 8 = 13$

عرف المصريون الكسر بمعنى الجزء (كسر بسطه 1 ومقامه عدد طبيعي)، كما عرفوا الكسرين $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$.

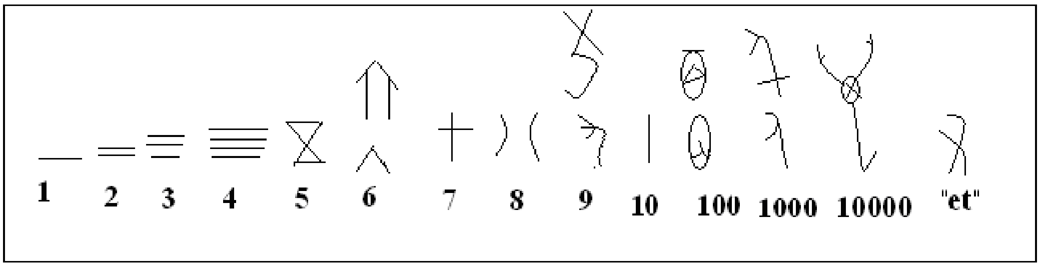
$\frac{2}{3}$ ممثل بـ  أو . $\frac{3}{4}$ ممثل بـ .

أما فيما يخص الأجزاء فنجد شكلا بيضويا وتحته مقام الجزء المراد تمثيله.

فمثلا:  يمثل $\frac{1}{10}$،  يمثل $\frac{1}{5}$.

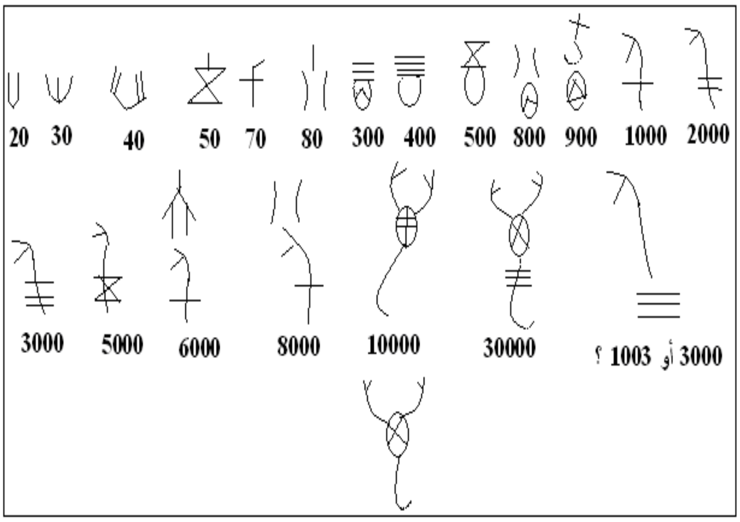
ثالثا: الحضارة الصينية:

نظام العد الصيني نظام عشري، أحد أنظمته يعتمد على الرموز 14 التالية لكتابة الأعداد البسيطة:



فالخط البسيط الأفقي يمثل الواحد، ويمكن إعادته بقدر ما نشاء من المرات للأرقام الصغيرة، التي تمثل بطبيعة الحال 2 و3 و4، كما كان يفعل البابليون، المصريون والرومانيون. أما الرموز الأخرى التي تمثل الأعداد الكبيرة فهي أكثر تعقيدا.

ويمكن القول إنه من أجل الأعداد 20، 30 .. والأعداد 200، 300 ... يمكن استعمال الرموز المدونة في الجدول التالي:



كما استعمل الصينيون طريقة لإجراء العمليات الحسابية، تدعى قضبان الحساب. وبعكس ما نقوم به الآن فإنهم يبدؤون بالوحدات الأعلى درجة وهذه الطريقة تفيد في المعرفة المباشرة لطول العدد النهائي (الحاصل)، لكن قد توجد إشكاليات بسبب الاحتفاظ عند إجراء العمليات على الوحدات الأقل درجة.

كما أن عندهم قاعدة لاستخراج الجذور التربيعية والجذور التكعيبية، كما استعمل الصينيون الكسور وأجروا العمليات عليها.

رابعا: الحضارة اليونانية:

نظام العد عند اليونانيين عشري غير وضعي، يعتمد على الحروف الأبجدية اليونانية ذات الأصل الفينيقي:

θ	η	ζ	ς	ε	δ	γ	β	α
9	8	7	6	5	4	3	2	1
ϱ	π	ο	ξ	ν	μ	λ	κ	ι
90	80	70	60	50	40	30	20	10
э	ω	ψ	χ	φ	υ	τ	σ	ρ
900	800	700	600	500	400	300	200	100
'θ	'η	'ζ	'ς	'ε	'δ	'γ	'β	'α
9000	**8000**	**7000**	**6000**	**5000**	**4000**	**3000**	**2000**	**1000**

يمكن تقسيم علم العدد إلى:

1) نظرية الأعداد الأولية، وقد ظهر نشاط كبير حول خواص الأعداد الفردية (ومن بينها الأعداد الأولية)، فنجد في كتل الأصول برهانا على أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية (بتعبيرنا المعاصر).

2) نظرية الأشكال العددية (أعداد خطية، أعداد سطحية ...).

3) جمع متتاليات من نوع ما.

ومن الكتب التي وصلتنا في علم العدد:

* **كتاب المدخل إلى علم العدد (الأرتماطيقي)**: ومؤلفه هو نيقوخاسن الجراساني (النصف الأول من القرن 3م).ويعتبر هذا الكتاب خلاصة النشاط الرياضي اليوناني في ميدان علم العدد، وقد ترجم هذا الكتاب من طرف ثابت بن قرة الحراني الصابئ (834 م □ 961 م).

* **كما نجد في كتاب الأصول لأقليدس** – وبالضبط في المقالات من 07 إلى 10 – معالجة للأعداد الأولية، المضاعف المشترك، المستقيمات غير الجذرية (التي يمكن أن تمثل بالعبارة $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$)

* **كتاب الأرتماطيقي**: ومؤلفه هو ديوفونطس (Diophante) (القرن 4م)، وقد ترجمه قسطا بن لوقا البعلبكي بعنوان "صناعة الجبر لديوفونطس"، ولم يترجمه باسم العدديات أو كتاب الحساب، لأن قسطا بن لوقا قرأه قراءة جبرية، ولم يقرأه قراءة عددية.

ومن بين الأمثلة على نصوص يونانية، النص التالي المأخوذ من كتاب الأرتماطيقي: "أوجد ثلاثة أعداد: إذا طرح مربع مجموعها من أحدها كان الناتج مربعا".

وترجمته بالرموز المعاصرة: أوجد ثلاثة أعداد طبيعية a، b، c بحيث يكون $(a + b + c)^2 - a$ مربعا تاما.

* **المدرسة الفيثاغورسية**: تنتسب المدرسة الفيثاغورسية إلى فيثاغورس (572 ق.م – 492 ق.م)، وقد كان لهذه المدرسة آراء فلسفية غريبة في علم العدد، تصل إلى درجة الإلحاد، لكن الذي يهمنا هو بعض النتائج التي توصلوا إليها في مجال علم العدد:

– توصلوا إلى أنه لا يمكن إيجاد عددين طبيعيين مربع أحدهما ضعف مربع الآخر، بمعنى أن $\sqrt{2}$ ليس طبيعيا.

– توصلوا إلى النتيجة التالية: $\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 = n^2$.

– قسم الفيثاغورسيون الأعداد حسب قواسمها إلى:

عدد زائد، وهو العدد الأكبر من مجموع قواسمه (مثل 14). عدد ناقص، وهو العدد الأصغر من مجموع قواسمه (مثل 12). عدد تام، وهو الذي يساوي مجموع عوامله (مثل 6، 28).

وقد أدى بحثهم عن هذه الأعداد إلى اكتشاف نوع آخر من الأعداد، وهو الأعداد المتحابة، والعددان المتحابان هما اللذان يكون مجموع قواسم كل واحد منهما يساوي العدد الآخر، مثل (220، 284).

خامسا: الحضارة الرومانية:

نظام الترقيم الروماني مبني على الطريقة الخماسية العشرية، ورموزه كما يلي:

* رمزوا للواحد بأصبع، لأي بخط رأسي (I).

* رمزوا للخمسة بيد.رسم شكلها (V).

* رمزوا للعشرة بيدين، أحدها فوق الأخرى (X).

* استعملوا بعض الحروف الهجائية: (L) للدلالة على 50، (C) للدلالة على 100، (D) للدلالة على 500، (M) للدلالة على 1000

وما عدا ذلك فقد اعتمدوا على تكرار الرمز ثلاث مرات، وفي المرة الرابعة يضعون الرمز إلى يسار الرمز ذي الرتبة العليا، فكانت رموزهم كالتالي:

1 (I) 2 (II) 3 (III) 4 (IV) 5 (V)

6 (VI) 7 (VII) 7 (VIII) 9 (IX) 10 (X)

العدد 1948 يكتب: MDCCCCXLVIII.

بقيت الرموز الرومانية مستعملة مدة طويلة، لكن العمليات الحسابية بها معقدة جدا، نظرا لكثرة الرموز المستعملة.

سادسا: الحضارة الهندية:

* نظام العد عند الهنود عشري وضعي، وقد خصوا كل رقم من الأرقام التسعة الأولى برمز خاص، واستخدموه في المراتب الأخرى (العشرات والمئات ...)، واتخذوا رمزا عاشرا ليدلوا به على المرتبة التي لا تحوي أي رقم، وهو الرمز الذي أصبح يعرف بالصفر (دائرة أو نقطة). وقد أخذ العرب هذا الترقيم وأدخلوا عليه بعض التعديل.

* استعمل الهنود الرمز $\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ للدلالة على الكسر $\frac{a}{b}$، وكانوا يكتبون الكسر $c+\frac{a}{b}$ على الصورة $\begin{matrix}c\\a\\b\end{matrix}$، فمثلا لدينا:

$\frac{19}{4}=4+\frac{3}{4}=\begin{matrix}4\\3\\4\end{matrix}$.

سابعا: الحضارة العربية الإسلامية:

بحث العرب في الأعداد وأنواعها وخواصها، كما بحث من قبلهم اليونان (بحثوا في الأعداد المتحابة مثلا، وقد وضع ثابت بن قرة قانونا لإيجادها)، وقد توصلوا إلى مسائل حسابية طريفة فيها متعة وفائدة. كما بحثوا في المتتاليات الحسابية والهندسية، وغيرها من الأبحاث الحسابية.

نظام العد عند العرب: تعود أوائل الأعمال التي كتبت بالعربية في مجال الحساب إلى محمد بن موسى الخوارزمي (القرن 9م)، وهي عبارة عن رسالتين صغيرتين: إحداهما لم تصلنا إلا عبر ترجمتها اللاتينية، والثانية عنوانها الجمع والتفريق. وأولى الكتابات العربية في علم الحساب هي من أعمال أحمد بن إبراهيم الأقليدسي (القرن 10م)، يعالج فيه المؤلف النظام الهندي، كما يرجع إلى نظامين آخرين: الحساب الأصبعي (حساب العقود)، والنظام الستيني، إضافة إلى علم الحساب اليوناني، الذي يحتوي على بدايات لنظرية الأعداد.

* **النظام الستيني**: يشار إلى هذا النظام على أنه النظام الحسابي لعلماء الفلك، وهو ينحدر من قدماء البابليين، وقد تقدم الكلام عليه عند ذكر الحساب البابلي.

* **الحساب الأصبعي**: ويسميه العرب حساب الروم. والحساب في هذا النظام كان يجري ذهنيا، ويعتمد على طي أصابع اليدين في وضعيات مختلفة تسمح بتمثيل الأعداد من 1 إلى 999، وتسمى وضعيات العقود، ولهذا سمي هذا النظام بنظام العقود.

والأعداد في هذا النظام تمثل بأحرف عربية حسب ترتيب يقال له "حساب الجُمَّل"، كما يلي:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز
1	2	3	4	5	6	7
ح	ط	ي	ك	ل	م	ن
8	9	10	20	30	40	50
س	ع	ف	ص	ق	ر	ش
60	70	80	90	100	200	300
ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
400	500	600	700	800	900	1000

ولإيجاد بقية الألوف تضاف الحروف حسب تسلسلها إلى حرف الغين (جغ يمثل 3000، طغ يمثل 9000)... ولكتابة أي عدد يتم إضافة الحروف لبعضها البعض على سبيل الجمع. مثال ذلك: رفح يمثل 288.

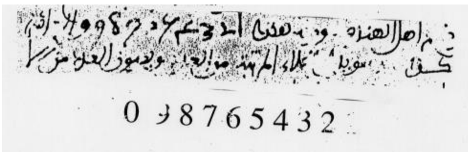
* **النظام الهندي**: ويعتبر أهم نظام تم اكتشافه لتمثيل الأعداد، وهو النظام المستعمل حاليا. ويذكر الأقليدسي أن هذا النظام كان يتم فيه الكتابة بواسطة الغبار أو الرمل، يرشمه الكاتب على لوحة، ثم يرشم فوقه بإصبعه، أو بقضيب صغير الأرقام التي يحتاج إليها، ومن ثم يمحو الأرقام مستبدلا إياها بالتتابع، وحسب الحاجة بأعداد أخرى، إلى أن لا يبقى في الأخير سوى النتيجة النهائية للعملية المطلوبة، ولهذا سميت الأرقام برشوم الغبار.

ويرجع الفضل إلى العرب في تقديم هذا النوع من الأرقام إلى أوربا (خاصة مدرسة الغرب الإسلامي)، فنجد أن ابن قنفذ القسنطيني يستعمل مزيجا من الرموز:

الرموز المتداولة حاليا لدى المغرب وأوربا، والتي استخدمها ابن البنا (الأرقام العربية): 0987654321.

الرموز المتداولة حاليا لدى المشارقة، وينسبها ابن البنا إلى الهنود (الأرقام الهندية): ٠٩٨٧٦٥٤٣٢١.

والمخطوط التالي يوضح طريقة كتابة الأرقام قديما:



* اتبع المراكشي طريقة ثابت بن قرة في أبحاثه حول الأعداد التامة[1] والأعداد الزائدة[1] والأعداد الناقصة[1] والمتحابة. ويظهر ذلك في رسالة له حققها محمد سويسي ونشرت في مجلة الجامعة التونسية والتي تتلخص فيما يلي :

الأعداد التامة: المكتشف منها 17: أصغرها 6، يلي ذلك 28، ومن الأعداد التامة 496، و 8128، و 33550336 ولا يوجد في الآحاد سوى 6، وفي العشرات سوى 28، وفي المئات سوى 496، وفي الآلاف سوى 8128. وهي دائماً تبدأ إما بالرقم 6 أو 8 في آحادها. وهي دائماً أعداد زوجية.

الأعداد الزائدة: مثل: 12، 20، 24، 120.

الأعداد الناقصة: مثل: 10، 44 ...

الأعداد المتحابة: وهي كل عددين مزدوجين، أحدهما ناقص، والثاني زائد، إذا كان مجموع عوامل كل منهما مساوياً للآخر، مثل العددين 220، وهو عدد زائد، و 284 وهو عدد ناقص.

* استعمل ابن البنا طريقة أصابع اليد لمعرفة جداء عددين أقل من 10. فمثلا لمعرفة حاصل الجداء 8 × 7 نلاحظ أن 2 + 5 = 7 و 3 + 5 = 8 فنرفع في اليد اليمنى أصبعين وفي اليسرى ثلاثة أصابع ونثني الأصابع الباقية عدد الأصابع المرفوعة (5) هو رقم العشرات وجداء عددي الأصابع المثنية هو رقم الآحاد (6 = 2×3).
نحصل على: 56 = 8×7.

* ابتكر أبو القاسم القرشي طريقة جديدة في توحيد مقامات الكسور انطلاقا من خوارزمية تحليل الأعداد إلى جداء عوامل أولية.

* ألف الحصار (القرن الثاني عشر الميلادي) كتابا اسمه "البيان والتذكار في العمل برشوم الغبار". يحتوي هذا الكتاب على مقدمة وبابين: أشار في المقدمة إلى الهدف من هذا الكتاب، ويحتوي الباب الأول على العمليات على الأعداد الطبيعية، والباب الثاني يتناول العمليات الحسابية على الكسور ومجاميع الأعداد الطبيعية. ومما يلاحظ عن هذا الكتاب أنه لا يحتوي إلا على أمثلة عددية محلولة بخوارزميات حسابية.

كما ألف كتابا آخر هو "الكتاب الكامل في صناعة العدد" وهو على قسمين أحدهما مفقود، ويمكن القول أن القسم الأول من هذا الكتاب يتناول محاور من كتاب البيان والتذكار بتوسع، ويعرض أبوابا جديدة مثل: تحليل عدد إلى عوامل أولية، والمضاعفات المشتركة، والقواسم المشتركة.

* نبغ القلصادي (1422م – 1497م) في علم الحساب، وشرح القلصادي عمل ابن البناء في الحساب، وأضاف إليه عدة إضافات هامة خاصة في نظرية الكسور. وقد يكون القلصادي (وقيل ابن البنا المراكشي) هو أول من رسم الكسور على الشكل $\frac{a}{b}$ (عددان صحيحان يفصل بينهما خط)، كما شرح بدقة متناهية طريقة إيجاد الجذور لأي عدد.وهي الطريقة المعروفة لدى علماء المسلمين المتقدمين.

* **الأعداد الأولية**: ذكر العلماء العرب نتائج عن الأعداد الأولية، جاءت عرضا خلال بحثهم في خواص الأعداد. فقد أدى بحث ابن الهيثم عن حلول بعض مسائل البواقي الصينية إلى المبرهنة المسماة حاليا بمبرهنة ويلسون (Wilson)، والتي تنص على أنه إذا كان n > 1 فإن: n أولي يكافئ $(n-1)!+1\equiv 0[n]$. والتي يعبر عنها

ابن الهيثم بما يلي: "... إن هذا المعنى يلزم.في كل عدد أول. أعني أن كل عدد أول – وهو الذي لا يعده إلا الواحد فقط – فإنه إذا ضربت الأعداد التي قبله بعضا ببعض على الوجه الذي قدمنا، وزيد على ما يجتمع واحد، كان الذي يجتمع إذا قسم على كل واحد من الأعداد التي قبل العدد الأول بقي منه واحد، وإذا قسم على العدد الأول لم يبق منه شيء".

حساب الجذور التربيعية والجذور النونية:

من بين الموروثات العربية نجد:

خوارزمية لإيجاد الجذر التربيعي لعدد طبيعي: (قيمة تقريبية بالنقصان). تتلخص هذه الطريقة فيما يلي (نأخذ مثال الكاشي 331781):

- تحدد الأدوار بمرتبتين ابتداء من اليمين: 331781.
- نبحث عن أقرب مربع تام للعدد 33 وهو 25، فنأخذ جذره وهو 5. ثم نطرح 25 من 33 فنجد 8.
- نضاعف 5 فنجد 10 ثم نبحث عن أكبر رقم a يحقق $10a \times a \leq 3317$ وهو 7 $(107 \times 7 = 749)$. نطرح 749 من 3317 فنجد 68. وهكذا نكرر العملية كما هو مبين:

33 17 81	576
-25 8	$5^2=25$ $5\times2=10$
817 -749 68	$107\times7=749$ $57\times2=114$
6881 -6876 005	$1146\times6=6876$

وهكذا نجد أن $331781 = 576^2 + 5$ فيكون $\sqrt{331781} \simeq 576$.

ملاحظة: يمكن الإكمال بنفس الطريقة لإيجاد المراتب العشرية للقيمة المقربة بالنقصان حسب الحاجة.

خوارزمية لإيجاد الجذر النوني لعدد طبيعي: أي إيجاد القيمة المقربة للعدد $\sqrt[n]{a}$ حيث a عدد طبيعي و n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3.

تشبه هذه الطريقة السابقة عموما، لكن مثلا تحدد الأدوار بـ n مرتبة وليست بمرتبتين ... وهكذا لقد استعمل الكاشي هذه الطريقة لحساب الجذر الخماسي للعدد 44240889506197 ليصل إلى النتيجة التالية: $536 \approx \sqrt[5]{44240889506197}$.

ثامنا: عصر النهضة:

* كان أول غربي أخذ الأرقام الهندية والنظام العشري عن العرب هو البابا سلفستر الثاني (ت 1003م)، وكان قد سافر إلى الأندلس ودرس فيها الحساب على يد علماء العرب، ثم عاد إلى بلاده لينشر ما تعلمه.

ثم جاء رجل إنكليزي اسمه إيدلر، عاش في النصف الأول من القرن 12م، وقضى ما يقارب من 07 سنوات متنقلا في بلاد العرب، وتعمق في دراسة الرياضيات والفلك، ونقل عددا من كتب الخوارزمي وأبي معشر إلى اللاتينية، ومن هذه الكتب كتاب الخوارزمي في حساب الأرقام الهندية، الذي كان أول كتاب دخل أوربا.

ولا ننسى دور الرياضي الإيطالي الشهير ليوناردو فيبوناتشي، الذي ألف كتابا بين فيه ميزات الأرقام الهندية وفوائد استعمال الصفر.

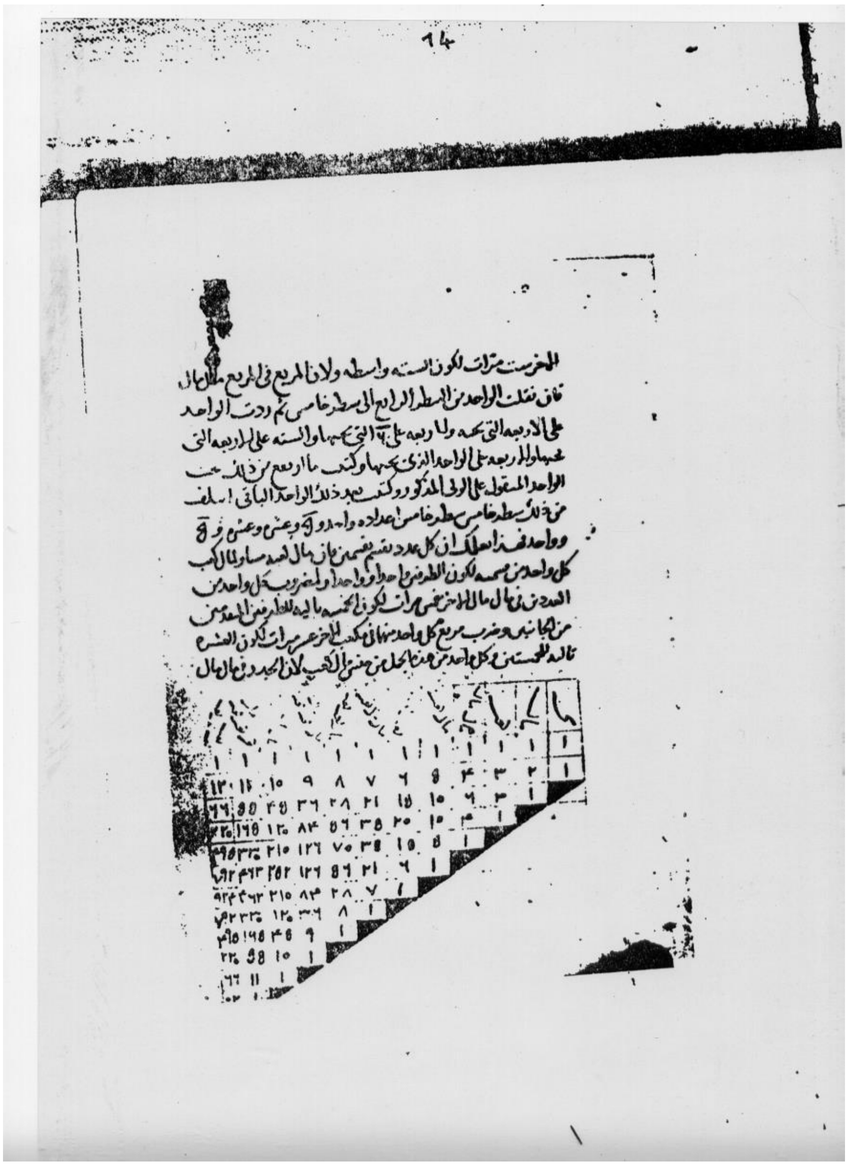
ولم ينقض القرنان 13م و 14م حتى شاع استعمال الترقيم الهندي في أوربا.

* استعمل سيمون ستيفن (Simon Stevin) (1548 م □ 1620 م) للدلالة على الأعداد العشرية رموزا للفصل بين الجزء الصحيح والجزء العشري

مثلا 89,532 يرمز له بـ 89⓪5①3②2③ .

قام سنيليوس (1581 م □ 1626 م) لاحقا بابتكار الكتابة المعروفة الآن للأعداد العشرية، حيث يتم الفصل بين الجزء الصحيح والجزء العشري بفاصلة.

* وينسب الغرب تطوير الكسور إلى ستيفن، لكن أعمال الكاشي سبقت ذلك بقرن ونصف.



مخطوط يظهر فيه ما يسمى بالمثلث العددي

نبذة عن تاريخ الجبر ونظرية المجموعات

يعرف الجبر بأنه ذلك الفرع من الرياضيات الذي يهتم بدراسة البنى الجبرية بشكل مستقل عن مفهوم النهاية، وأنه وإلى غاية القرن 17 تعميم للحساب. واسم علم الجبر مشتق من الكلمة العربية الجبر التي استخدمها الخوارزمي اسما لكتابه، فهو بالفرنسية Algèbre، وبالإنجليزية Algebra، وبالألمانية Die algebra.

أولا: الحضارة البابلية:

1) توجد في اللوحات المسمارية المتطابقات الشهيرة، التي كان يعتقد أنها من اختراع إقليدس، وهي:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+2b)a + b^2 = (a+b)^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$
$$(a+b)^2 + (b-a)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

2) كما نجد عندهم مسائل رياضية (جبرية)، مكتوبة بالحروف المسمارية، وغير معبر عنها بالرموز أو المجاهيل.

مثال ذلك:

0 جمعت المساحة وضلع مربع: 0;45 $x^2 + x = 0{,}75$

(معادلة من الدرجة الثانية: $x^2 + bx = c$)

1. ضع ;1 الوحدة.

2. قسم إلى جزئين: ;1 : 0;30 $\frac{b}{2} = 0{,}5$

3. اضرب 0;30 و 0;30 : 0;15 $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0{,}25$

4. أضف 0;15 إلى 0;45 : ;1 $\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 0{,}75 = 1$

5. ;1 هو مربع

6. 0;30 الذي ضربته من ;1 اطرحه: 0;30

7. 0;30 هو ضلع المربع $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\Delta} = 0,5$

3) كما نجد مسائل ذات مجهولين (معادلات ذات مجهولين).

من أمثلة ذلك: حقل مستطيل مساحته 20، ومجموع طوله وعرضه 10، ونبحث عن طوله وعرضه.

إن حل المسألة يقودنا إلى الجملة التالية: $\begin{cases} xy = 20 \\ x + y = 10 \end{cases}$.

يضع البابلي $x = \frac{s}{2} + a$، $y = \frac{s}{2} - a$ وبعد التعويض في المعادلتين السابقتين نحصل على معادلة من الدرجة الثانية، وهكذا نجد أن البابليين فكروا في تغيير المجهول لأول مرة - حسب علمنا -

والأمر الملاحظ أن البابليين لم تكن لهم الخوارزميات والحلول العامة للمعادلات من الدرجة الثانية (كما سنراه عند الخوارزمي)، وإنما هي أمثلة منتشرة عبر اللوحات الطينية، قد يكون اعتمد عليها الرياضيون فيما بعد حتى وصلت إلى الخوارزمي فعممها.

ثانيا: الحضارة المصرية:

من بين المسائل الموجودة في بردية ريند توجد 40 مسألة حسابية تعتمد في حلولها على المعادلات الجبرية الخطية، كلها مستمدة من الحياة اليومية مثل: تقسيم الأرغفة، الكيل، الحبوب، الحيوانات ... وهي معادلات خطية ($ax = b$) تعتمد أساسا على ما يسمى بطريقة الخطأ الواحد. وهو يعني إعطاء قيمة خاطئة x_0 لـx، ثم إيجاد قيمة b_0 الموافقة لها، وبها نحصل على الحل الصحيح $a = \frac{b}{b_0} x_0$.

مثال ذلك: كمية وسبعها تعدل أربعة وعشرين $x + \frac{1}{7}x = 24$. نضع $x_0 = 7$ فنجد $b_0 = 8$. ومنه: $x = 21$.

كما نجد أيضا مسائل مختلفة كجملة المعادلتين الآتية: $x^2 + y^2 = 100$ و $x = \frac{3}{4}.y$، وحلولها هي: $x = 6$، $y = 8$ (نلاحظ أن (6,8,10) تحقق متطابقة فيثاغورس).

ثالثا: الحضارة الصينية:

في الرياضيات الصينية نجد صنفين هامين من المسائل:

1) مسائل تحل بجمل معادلات خطية: من الشكل

$$ax + by + cz = d \quad x + y + z = d$$

ومثال ذلك مسألة 100 سرب: " نبيع ديكا بـ 5 قطع ودجاجة بـ 3 قطع وثلاث صيصان بقطعة. إذا كان عندنا 100 قطعة فإنها تسمح بشراء 100 طائر فما هو عدد الديكة وعدد الدجاجات وعدد الصيصان؟"

اقترح " زانغ كيجيان سيان جينغ " في كتابه ثلاثة حلول

* 4 ديكة و 18 دجاجة و 78 صوصا.
* 8 ديكة و 11 دجاجة و 81 صوصا.
* 12 ديكا و 4 دجاجات و 84 صوصا.

يمكن أن نلاحظ أن " زانغ كيجيان " وضع جميع حلوله ماعدا المتعلقة بعدد الديكة يساوي 0.

2) مسائل الموافقات: وهي التي تسمى بالبواقي الصينية (théorème des chinois)، وهي من الشكل

$$x \equiv r_1[m_1] \equiv r_2[m_2] \equiv r_3[m_3]$$

من جهة نظر الرياضيين الصينيين القدامى فإنه كان من الصعب إثبات الحل، لذلك قام الرياضيون الصينيون بالبحث عن تفسير منطقي يمكن من شرح الحل.

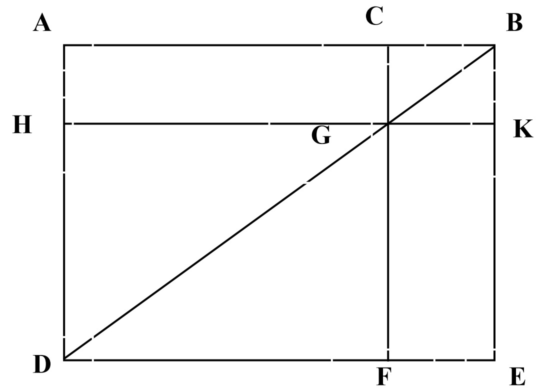
رابعا: الحضارة اليونانية:

يعتبر التراث اليوناني تراثا هندسيا بالدرجة الأولى. لكن وسط هذه الزحمة الهندسية جاء ديوفنطس (Diophantus) (250 ق.م) بأعمال جبرية في كتاب سماه الأرثماتيقي (الحساب)، وقد ترجمه العرب باسم صناعة الجبر، وهو يضم مسائل حسابية، بعضها يفضي إلى معادلة خطية، أو تربيعية، أو من درجة أعلى.

وقد ذكر ديوفنطس صراحة أنه بصدد حل معادلات من النوع $a.x^m = b.x^n$ وأنه ينوي تخصيص مؤلف للبحث في المعادلات من الدرجة الثانية، لكن لا يوجد شيء.

كما أننا نجد في كتاب الأصول لإقليدس مسائل جبرية حلت بطريقة هندسية، ومثال ذلك الشكل الرابع من المقالة الثانية: "إذا قسم خط مستقيم كيف ما اتفق فإن مربعي القسمين وضعف السطح الذي يحيط به القسمان مساو لمربع الخط كله". تمثل هذه المبرهنة جبريا المتطابقة الشهيرة :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



ننشئ المربع ABED الكائن من الخط AB. نصل BD، ثم من C نرسم الخط CF موازيا لكل من الخطين AD ،EB . ومن النقطة G نرسم موازيا لكل من الخطين AB، DE . ومنه: مربع AB يساوي مربعي AC، CB وضعف المستطيل المحيط بالخطين AC، CB .

خامسا: الحضارة الهندية:

يقال إن الهنود هم أول من استعمل الكميات السالبة، وميزها عن الكميات الموجبة، فعرفوا أن للجذر التربيعي قيمتين: موجبة وسالبة، وقد حلوا معادلات من الدرجة الثانية بطريقة تقرب من الطريقة التي نعرفها الآن (ويعتقد بعضهم أن الخوارزمي أخذ عنهم طريقة حل معادلة من الدرجة الثانية).

فهناك رياضي اسمه أريابهاتا (Aryabhata) عرف حلول معادلات من الدرجة الثانية، وعدد حدود متتالية حسابية عرف منها الحد الأول والأساس ومجموع الحدود. ثم ظهر بعده في القرن السابع ميلادية براهماجوبتا

(Brahme Gupta)، والذي أعطى حل المعادلة $ax^2+bx=c$، وبعد ذلك جاء ماهافيرا كاريا (Mahavicarya) ووضع قواعد لحل معادلات من الدرجة الثانية، لكنه استعمل المجهول وجذره بدل المجهول ومربعه.

وكذلك حل الرياضي الهندي "بهاسكارا" المعادلة $x^2-45=250$ وأوجد $x_2=50$ و $x_1=-5$.

فالجبر الهندي لم يعالج سوى الأعداد بعيدا عن كل تمثيل هندسي، ولكنهم لم يهتموا في التعرف إلى الكميات التي أجروا عليها العمليات إن كانت موجبة أو سالبة دون أن يدققوا مسبقا في هذا المفهوم الجديد.

سادسا: الحضارة العربية الإسلامية:

1) مدرسة الخوارزمي: إن أول من استعمل كلمة جبر للعلم الذي يحمل هذا الاسم، هو: محمد بن موسى الخوارزمي (الذي عاصر فترة المأمون، ولعله بقي حتى خلافة الواثق).

أشهر كتب الخوارزمي "الجبر والمقابلة"، وله من الكتب أيضا: "كتاب الزيج"، "كتاب الرخامة"، "كتاب عمل الإسطرلاب"، "تاريخ اليهود"، "كتاب الحساب الهندي"، "كتاب الجمع والتفريق" ...

ذاع صيت الخوارزمي، وزادت شهرته فبلغت مشارق الأرض ومغاربها، وصار اسمه يتردد في لغات كثيرة محرفا أو مقنعا، ففي الإنجليزية نجد كلمة ألجورزم (Algorithme) معناها الطريقة الوضعية في حل المسائل، وبقيت الأعداد 1.....9 إلى غاية أوائل القرن 18 م تسمى باللاتينية ألجورزمس (Algorismus)، وفي اللغة الإسبانية نجد كلمة جوارزمو (Guarismo) التي تعني الأعداد والأرقام. وقد جاء في الجزء الأول من معجم اللغة الفرنسية لمؤلفه الفرنسي ليتري (Littré) "كان مفهوم ألغورتم في القرن الثالث عشر يعني العمل الحسابي بواسطة الأرقام العربية".

قسم الخوارزمي كتابه إلى الأبواب التالية: المقدمة، أصناف المعادلات الست، باب الضرب، باب الجمع والنقصان، باب المسائل الست، باب المسائل المختلفة، باب المعاملات، باب المساحة، ويختمه بكتاب الوصايا.

يقول الخوارزمي في كتابه الشهير "المختصر في حساب الجبر والمقابلة": (ووجدت الأعداد التي يحتاج إليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب إلى جذر ولا إلى مال. فالجذر منها كل شيء مضروب في نفسه من الواحد وما فوقه من الأعداد وما دونه من الكسور. والمال كل ما اجتمع من

الجذر مضروب في نفسه. والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة إلى جذور ولا إلى مال). ويقصد بالجذر المجهول (نرمز له عادة بـ x)، وللمال بمربعه (x^2)، والعدد هو العدد الطبيعي، أو الناطق، أو الجذر ...

ومفهوم الجبر عند الخوارزمي ن تجبر طرف المعادلة بما نقص من أموال، أو جذور، أو أعداد، تزيد ذلك على الطرف الآخر (أي حذف الحدود السالبة). والمقابلة هي أن تقابل بين الحدود المتشابهة من طرفي المعادلة.

قسم الخوارزمي المعادلات من الدرجة الأولى والثانية إلى ستة أقسام هي:

* **أموال تعدل جذورا:** $ax^2 = bx$. يقول الخوارزمي: (فأما الأموال التي تعدل الجذور، فمثل قولك مال يعدل خمسة أجذاره، فجذر المال خمسة، والمال خمسة وعشرون).

* **أموال تعدل عددا:** $ax^2 = c$. يقول الخوارزمي: (وأما الأموال التي تعدل العدد فمثل قولك مال يعدل تسعة فهو المال وجذره ثلاثة).

* **جذور تعدل عددا:** $bx = c$. يقول الخوارزمي: (وأما الجذور التي تعدل عددا، فكقولك جذر يعدل ثلاثة من العدد، فالجذر ثلاثة، والمال الذي يكون منه تسعة).

* **أموال وجذور تعدل عددا:** $ax^2 + bx = c$. يقول الخوارزمي: (فأما الأموال والجذور التي تعدل العدد فمثل قولك: مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما، ومعناه أي مال إذا زدت عليه مثل عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين. فبابه أن تنصف الأجذار وهي في هذه المسألة خمسة، فتضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين، فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين، فتأخذ جذرها وهو ثمانية، فتنقص منه نصف الأجذار وهو خمسة، فيبقى ثلاثة وهو الجذر، والمال الذي تريده تسعة).

* **أموال وعدد تعدل جذورا:** $ax^2 + c = bx$. يقول الخوارزمي: (وأما الأموال و العدد التي تعدل الجذور فمثل قولك: مال وأحد وعشرون من العدد يعدل عشرة أجذاره، ومعناه أي مال إذا زدت عليه واحدا وعشرين درهما كان ما اجتمع مثل عشرة أجذار ذلك المال. فبابه أن تنصف الأجذار فتكون خمسة، فاضربها في مثلها تكون خمسة وعشرين، فانقص منها الواحد والعشرين الذي ذكر أنها مع المال فيبقى أربعة، فخذ جذرها وهو اثنان، فانقصه من نصف الأجذار وهو خمسة، فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريده، والمال تسعة، وإن شئت فزد الجذر على نصف الأجذار فتكون سبعة وهو جذر المال الذي تريده، والمال تسعة وأربعون).

* **جذور عدد و تعدل أموالا:** $bx+c=ax^2$. يقول الخوارزمي: (وأما الجذور و العدد التي تعدل الأموال فنحو قولك: ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالا. فبابه أن تنصف الأجذار فتكون واحدا ونصفا، فاضربها في مثلها تكون اثنين وربعا، فزدها على الأربعة فتكون ستة وربعا، فخذ جذرها وهو اثنان ونصف، فزده على نصف الأجذار وهو واحد ونصف، فتكون أربعة وهو جذر المال، والمال ستة عشر).

ثم قرر الخوارزمي قاعدة القسمة على معامل x^2 في المعادلات من الدرجة الثانية فيقول: (فكل ما كان أكثر من مال أو أقل فاردده إلى مال واحد).

ثم تطرق إلى التعليل الهندسي للمعادلات من الدرجة الثانية، وهو ما يسمى بإكمال المربع (طريقة المميز).

شروح كتاب الخوارزمي: ظهرت عدة شروح لكتاب "الجبر والمقابلة" منها شروح: سنان بن الفتح، الصيدناني، أبي الوفاء البوزجاني، ومنها ما ألفه ثاب بن قرة تحت عنوان "تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية".

2) مدرسة أبي كامل المصري: أبو كامل هو شجاع بن أسلم المصري (عاش في النصف الأول من القرن الثالث الهجري)، وله كتاب اسمه "الجبر والمقابلة"، ويقع في ثلاثة أجزاء.

من بين ما يميز كتب أبي كامل أن الأعداد الصماء لم تستعمل كجذور للمعادلات (كما هو الحال عند الخوارزمي)، بل استعملت كمعاملات للمجاهيل.

في الجزء الثاني من كتاب "الجبر والمقابلة" نجد أنه يستعمل الجبر كوسيلة لحل مسائل هندسية، كانت صعبة أو غير قابلة للحل عند أسلافه، وتتضمن المسائل التحديد العددي لضلع المخمس المنتظم والمعشر المنتظم والشكل المنتظم ذي 15 زاوية، والمرسومة داخل دائرة قطرها 10. فالأضلاع مجهولة الطول يستخرج أبو كامل لها معادلات ويحلها، بعدئذ يمكن تقريب المقادير.

من أهم رياضيي هذه المدرسة نجد المصيصي، وله كتاب في الجبر مفقود، كما نجد سنان بن الفتح وله كتاب "مال المال والكعب والأعداد المتناسبة".

ومن أهم أعمال هذه المدرسة:

* تعميم العمليات على الأعداد الصماء.

* تعميم مفهوم الأس وتطبيقه في دراسة المعادلات، فنجد: الشيء (x)، المال (x^2)، الكعب (x^3)، مال المال (x^4)، المداد (x^5)، مال الكعب (x^6).

* توسيع مفهوم كثيرات الحدود ووحيدات الحد.

* كانت الأسس تضرب ولا تجمع.

3) مدرسة الكرخي: هو أبو بكر محمد بن الحسين الكرخي (أو الكرجي) (ت 1016م أو 1029م)، عاش في عهد فخر الملك. ألف كتبا كثيرة أغلبها مفقودة، منها: "حساب الهند"، "نوادر الأشكال"، "الدور والوصايا"، "الفخري"، "البديع"، "الكافي في الحساب"، "علل حساب الجبر والمقابلة"، "المحيط في الحساب".

من بين المسائل التي اهتم بها الكرخي نجد:

* العدد الذي لو أضيف إليه مربعه لكان الناتج مربعاً ولو طرح منه مربعه لكان الناتج مربعاً.

* النظريات التي تتعلق بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد التي عددها n.

* عددان مجموع مكعبيهما يساوي العدد الثالث.

* دراسة منظمة للمقادير الجبرية المرفوعة لأسس مختلفة مستخدماً العمليات الحسابية على هذه المقادير. وغير ذلك.

السموأل المغربي: من بين أبرز رياضيي هذه المدرسة نجد السموأل المغربي (ت 1175م)، وقد ألف كتابا هاما اسمه "الباهر في الجبر". وله أيضا مجموعة من الكتب هي: "الزاهر في الجبر"، "رسالة في التحليل والتركيب"، "رسالة الموجز المضوي في الحساب"، "التبصرة في علم الحساب"، "الكافي في حساب الدرهم والدينار"، "المنير في حساب الجواهر المختلطة لاستخراج مجهولها"،

من بين أعمال هذه المدرسة نجد:

* محاولة حل معادلات من الدرجة الثالثة جبريا.

* تعميم وتغيير تعريفات وحيدات الحد، حيث أصبحت الأسس تجمع عند التسمية.

* دراسة كثيرات الحدود كأشياء مستقلة.

* ظهور جداول تسمح بكناية كثيرات الحدود باستعمال عواملها فقط، وهو ما يعتبر خطوة أولى لظهور الترميز.

مثال: 3 مال كعب إلا مال و2 جذور و7 من العدد.

مال كعب	مال مال	كعب	مال	جذر	عدد
3	إلا 1	0	0	2	7

* توسيع مفهوم العمليات الحسابية لكثيرات الحدود من طرح وجمع وضرب وقسمة.

* هناك محاولات لتجذير كثيرات الحدود.

* ظهور المثلث العددي المنسوب لباسكال.

بهاء العاملي (1547 م □ 1622 م): لخّص وعلّق على مؤلفات الكرخي في الجبر والحساب واستنتج طريقة جديدة لإيجاد الجذر الحقيقي التقريبي للمعادلة الجبرية وسمّاها طريقة (الكفتين) أو طريقة (الميزان الرياضي). من مؤلفاته: "ملخص الحساب والجبر وأعمال المساحة"، "خلاصة الحساب"، "بحر الحساب"، "رسالة في الجبر والمقابلة"، "رسالة في الجبر وعلاقته بالحساب".

4) مدرسة عمر الخيام: أبو الفتح عمر الخيام (ت 1131م) رياضي وشاعر من بلاد ما وراء النهر (طاجيكستان حاليا)، له مصنفات هي: "رسالة حول استخراج الجذر النوني"، "رسالة في شرح ما أشكل من مصادرات أقليدس"، "رسالة في قسمة ربع الدائرة"، "مقالة في الجبر والمقابلة".

من بين أعمال هذه المدرسة:

* اعتمدوا على الحلول الهندسية.

* تم تصنيف المعادلات من درجة أقل أو تساوي 3.

* إعطاء بعض الحلول الهندسية للمعادلات من الدرجة الثالثة عن طريق القطوع المخروطية.

اشتهر عمر الخيام بالبحث عن حلول المعادلات من الدرجة الثالثة عن طريق القطوع المخروطية. وقد سبقه في هذه المحاولات رياضيون نذكر منهم:

* الماهاني (ت 880): $x^3 + c = ax^2$.
* أبو نصر بن عراق (قرن 11 م): $x^3 + ax^2 = c$
* القوهي (قرن 10م): $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2+\dfrac{x}{y}=72 \end{cases}$
* ابن الهيثم (ت. 1041م): $a^2=\dfrac{a}{x^3}$

صنف عمر الخيام المعادلات إلى أربعة أصناف:

المفردات:

1) $bx = c$ 2) $ax^2 = c$ 3) $x^3 = c$

4) $ax^2 = bx$ 5) $x^3 = bx$ 6) $x^3 = ax^2$

المقترنات الثلاثية التي يبرهن عليها بخواص الدائرة:

7) $x^2 + bx = c$ 8) $x^2 + c = bx$

9) $x^2 = bx + c$ 10) $x^3 + ax^2= bx$

11) $x^3 + bx = ax^2$ 12) $x^3 = ax^2 + bx$

المقترنات الثلاثية التي يبرهن عليها بخواص القطوع المخروطية:

13) $x^3 + bx = c$ 14) $x^3 + c = bx$

15) $x^3 = bx + c$ 16) $x^3 + ax^2 = c$

17) $x^3 + c = ax^2$ 18) $x^3 = ax^2 + c$

المقترنات الرباعية التي يبرهن عليها بخواص القطوع المخروطية:

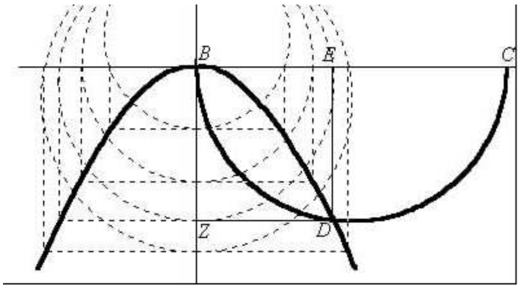
19) $x^3 + ax^2 + bx = c$ 20) $x^3 + ax^2 + c = bx$

21) $x^3 + bx + c = ax^2$ 22) $x^3 = ax^2 + bx + c$

23) $x^3 + ax^2 = bx + c$ 24) $x^3 + bx = ax^2 + c$

25) $x^3 + c = bx + ax^2$

فمثلا لحل الصنف الأول من المعادلات نجري تحويلا عليها لتصبح $x^3 + p^2x = qp^2$ حيث $p = \sqrt{b}$ و $q=\frac{c}{b}$. ثم ندرس تقاطع القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = x(q - x)$ مع الدائرة التي معادلتها $x^2 = px$ كما في الشكل.



* حاول عمر الخيام إعطاء حل عددي تقريبي للمعادلة التكعيبية، فقد أفصح للمرة الأولى في رسالته "قسمة ربع الدائرة" عن مشروعه حول نظرية المعادلات، توصل من خلالها إلى حل تقريبي عن طريق جداول علم المثلثات.

* قام شرف الدين الطوسي (1135 م □ 1213 م) في كتابه "المعادلات" بتصنيف المعادلات من الدرجة الثالثة (وما دون)، حسب وجود أو عدم وجود جذور موجبة لها، وقد قسم كتابه إلى قسمين:

يحتوي القسم الأول على 20 معادلة، قدم فيه بناء هندسيا لحلول المعادلات من الدرجة الثالثة (أما المعادلات من الدرجة الثانية فقد حلها بواسطة المميز)، وفي حالة وجود حل سالب فإنه لا يأخذه بعين الاعتبار.

أما القسم الثاني فيحتوي على المعادلات الخمس المتبقية، والتي لا تحوي أي حل موجب، فهي بتعبيره "حالات مستحيلة"، وقد قاده ذلك إلى ما يسمى بالتعبير الحالي دراسة القيم القصوى (وهو قسم مهم من أقسام الحساب التفاضلي المتفرع عن التحليل).

* عالج شرف الدين الطوسي (1135م □ 1213م) في رسالته التي ألفها حول المعادلات طريقة عددية لإيجاد جذور تقريبية لمعادلات من الدرجة الثالثة فما دون ذات معاملات صحيحة، وهذه الطريقة تسمى حاليا بطرقة روفيني – هورنر.

عند تفحص عرض الطوسي لهذا العمل نلاحظ ما يلي:

* لم يكتف الطوسي بإدخال خوارزمية للحل، بل حاول صياغة نظرية رياضية لتبرير هذه الخوارزمية وتطبيقها.

* الأقسام المكونة لهذه النظرية متفاوتة من حيث الدقة الرياضية ومن حيث التعميم.

* تتميز الخوارزمية التي اقترحها الطوسي بأنها مثلى، تؤدي إلى احتساب الجذر المطلوب بشكل فعلي وسريع.

* يمكن تعميم هذه الخوارزمية إلى معادلات جبرية من الدرجة أكبر من3..

5) مدرسة المغرب الإسلامي والأندلس: من بين مؤلفات الرياضيين المغاربة نجد "ثمار العدد" للزهراوي و"الكتاب الكامل" لابن السمح، وهما مفقودان، وقد وجدت بعض نصوصهما مبثوثة في شرح ابن زكريا الغرناطي لكتاب "الكامل في العدد" للحصار.

كما اهتم المغاربة بكتاب أبي كامل المصري في الجبر، فنجد أن من بين أحسن شروحه شرح أبي القاسم القرشي كما يذكر ذلك ابن خلدون (وهذا الشرح مفقود).

من بين مضامين هذه المدرسة:

* استقلال الجبر نهائيا عن الهندسة.

* ظهور الترميز في الرياضيات، فيرمز للشيء بـ شـ، وللمال بـ مـ، وللكعب بـ كـ ... مثال ذلك: 10 أموال و5 من العدد يعدل 3 أشياء تكتب كالآتي: 10 ـمـ 5 لـ 3 ـشـ.

* ظهور الصفر كطرف ثان في معادلة من الدرجة الأولى وذلك باستعمال الرموز مثل: 8 ـشـ لا 7 لـ 0 $8x - 7 = 0$

أرجوزة ابن الياسمين في الجبر: هو أبو عبد الله محمد بن عمر الشهير بابن الياسمين (ت 1204م)، لا يعرف عن حياته سوى القليل، من ذلك أنه ألف كتابا اسمه "تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار" يشتمل على الحساب والجبر وبداية ظهور الترميز الرياضي، كما أن له مؤلفا آخر اسمه اختصار "الجبر والمقابلة".

أما أهم عمل له فهو الأرجوزة المسماة باسمه، وهي أرجوزة شعرية تضمنت مبادئ علم الجبر، وقد لاقت رواجا كبيرا بين الرياضيين المغاربة، فشرحها ابن قنفذ القسنطيني، والقلصادي، وسبط الماريني، وابن الهائم

وغيرهم. وقد وصل إلينا شرح ابن قنفذ (ت 1407م) المسمى "مبادئ السالكين في شرح رجز ابن الياسمين"، وشرح القلصادي (ت 1497م) المسمى "تحفة الناشئين عن أرجوزة ابن الياسمين".

أعمال ابن البنا المراكشي: هو أبو العباس أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي المعروف بابن البناء المراكشي (1256 م □ 1321 م)، برز بصفة خاصة في الرياضيات، والفلك، والتنجيم، والعلوم الخفية، وكذلك في الطب.

ينسب إليه أزيد من مائة كتاب منها ثلاثون كتابا مكرسة للرياضيات وعلم الفلك. كما أنه ألف عددا كبيرا من المؤلفات في علوم أخرى مختلفة مثل علم اللغة، والبلاغة، وعلم التنجيم، والنحو والمنطق. وقد حُفظ جزء من هذه الأعمال ونشر بعضها وترجم إلى اللغات الحديثة.

من أشهر مؤلفات ابن البنا كتاب "تلخيص أعمال الحساب"، والذي ظل مرجعا هاما لفترة طويلة، وكثرت شروحه منها: "رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب" لابن البنا نفسه، "اللباب في شرح تلخيص أعمال الحساب" لعبد العزيز الهواري (ت 1345م) تلميذ ابن البنا، "التمحيص في شرح التلخيص" لابن هيدور التادلي (ت 1413م)، "حط النقاب عن وجوه أعمال الحساب" لابن قنفذ القسنطيني، "حط النقاب بعد رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب" لابن زكريا الغرناطي (ت 1404م)، "حاوي اللباب في شرح تلخيص ابن البنا في الحساب" لابن المجدي (ت 1446م).

أعمال القلصادي: برز القلصادي في علم الرياضيات كأول من استخدم الرموز والإشارات الجبرية التي نعرفها في تاريخنا المعاصر. ولقد شرح القلصادي عمل ابن البناء في الحساب وأضاف إليه عدة إضافات هامة خاصة في نظرية الكسور، وقد يكون القلصادي هو أول من رسم الكسور كما شرح بدقة متناهية طريقة إيجاد الجذور لأي عدد.وهي الطريقة المعروفة لدى علماء المسلمين المتقدمين.

6) أعمال متفرقة:

* كتب أبو الوفاء البوزجاني (940م – 998م) في علم الجبر، وزاد على بحوث الخوارزمي زيادات أساسية، فقد حل المعادلتين $x^4 = c$ و $x^4 + bx^3 = c$، وقد استدل على ذلك من أحد كتبه التي ذكرها ابن النديم في كتابه "الفهرست" وهو "استخراج ضلع المكعب بمال مال وما ترتب منهما"، وحتى وقت قريب لم يعثر على الحل الذي اتبعه أبو الوفاء البوزجاني.

* من بين النتائج المهمة التي توصل إليها العرب نجد أن الخوجندي (1000م)، وبهاء الدين العاملي (1547م – 1627م) توصلا إلى أن مجموع مكعبين لا يمكن أن يكون مكعبا (أي أن المعادلة $x^3 + y^3 = z^3$ لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}$)، وهي حالة خاصة من نظرية فيرما.

* ومن بين الرياضيين المتأخرين نجد الرياضي غياث الدين جمشيد بن محمود بن مسعود الكاشي أو الكاشاني (ت 1429م) أحد الرياضيين والفلكيين المشهورين في عصر الانحطاط، له مصنفات، أشهرها كتاب "مفتاح الحساب"، وموضوعه الأساسي علم الحساب. ويتضمن:

* **مقدمة**: في تعريف الحساب والعدد وأقسامه.

* **المقالة الأولى**: في حساب الصحاح، وفيها تقديم الأعداد، الضرب، القسمة ...

* **المقالة الثانية**: في حساب الكسور، وتتضمن العمليات على الكسور.

* **المقالة الثالثة**: في طريقة حساب المنجمين، وتتضمن الحساب باستعمال الأحرف الأبجدية.

* **المقالة الرابعة**: في المساحة، أورد فيها مختلف قوانين المساحات.

* **المقالة الخامسة**: وتتضمن حلول المعادلات وجمل المعادلات، وهي على أبواب:

– **الباب الأول**: في الجبر والمقابلة، وذكر فيها مجموعة من التعاريف والقواعد، كما تطرق إلى المعادلات الستة للخوارزمي، والتناسب، وغير ذلك.

– **الباب الثاني**: في استخراج المجهول بالخطأين، وهي طريقة كانت شائعة عند الصينيين القدامى وغيرهم.

– **الباب الثالث**: في إيراد بعض القواعد الحسابية التي يكون الاحتياج إليها في استخراج المجهولات كثيرا.

– **الباب الرابع**: في الأمثلة، أورد فيه عدة أمثلة في استخراج المجهولات.

سابعا: عصر النهضة:

ليوناردو فيبوناتشي (1180 – 1250): هو ليوناردو دي بيزا الملقب بفيبوناتشي (Leonardo da Pisa Fibonacci)، تعلم بمدينة بجاية الجزائرية في نهاية القرن الثاني عشر، وسافر أيضا إلى مصر والشام، وقد ساهمت مؤلفاته الكثيرة مساهمة فعالة في التعريف بأعمال الخوارزمي في إيطاليا.

❋ اهتم فيبوناتشي بحل المسألة التالية: "كم زوجا من الأرانب يمكن الحصول عليها خلال سنة عندما يكون لنا في البداية زوج واحد، إذا علمنا أن كل زوج يلد زوجا آخر كل شهر؟" أثبت فيبوناتشي أن عناصر متتاليته هي حل لهذه المسألة، وهي: 1، 1، 3، 5، 8، 13، 21 ... وتعطى بالشكل العام: $\begin{cases} u_0=1, u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n, n \in IN \end{cases}$.

❋ كان جيربرت أوريلاك (938 – 1003) قد اقترح على الأوربيين نظام الترقيم العربي، ثم جاء فيبوناتشي ليقدم بحثا كاملا عن هذا النظام سنة 1202.

كاردانو (1501 – 1576) والمعادلات من الدرجة الثالثة: هو الرياضي جيرولامو كاردانو، وإليه تنسب طريقة حل المعادلات من الشكل $x^3 + px + q = 0$ بطريقة كاردانو، وإن كانت نسبتها إليه يكتنفها شيء من الغموض، وبعضهم يضيف له مشاركة الرياضي نيكولو تارتاغليا (1499 – 1557)، لكن المؤكد أن كاردانو اشتغل على هذا النوع من المعادلات. والفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي البحث عن حلول من الشكل $(x = u + v)$ لنحصل على أن u^3 و v^3 هما حلان للمعادلة $y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0$، فنجد: $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=0}$، $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=0}$

وبذلك نحصل على الحل $x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

بومبيللي (1526م – 1572م) والأعداد المركبة: إن ولادة الأعداد التخيلية نشأت عند محاولة حل المعادلات من الدرجة الثالثة، إذ أنهم اصطدموا آنذاك بالجذور التربيعية للأعداد السالبة، وهي ما أسموها أول الأمر بـ "الأعداد المستحيلة".

استعمل بومبيللي الطريقة المسماة بطريقة كاردانو لحل المعادلة $x^3 = 15x + 14$ ليحصل على المعادلة التالية: $y^2 - 4y + 125 = 0$.التي لا تقبل حلولا حقيقية، ولهذا نتخيل عددا i يحقق $i^2 = -1$، فنحصل على الحلول المركبة للمعادلة.

فيراري (1522م – 1565م) والمعادلات من الدرجة الرابعة: اقترح فيراري طريقة جديدة لحل المعادلات من الدرجة الرابعة عن طريق تفكيك كثير الحدود من الدرجة الرابعة إلى كثيري حدود من الدرجة الثانية.

فيات (1540م – 1603م) والترميز: من المعلوم أن استعمال الرموز كان شائعا في مدرسة الغرب الإسلامي، فقد استعمل القلصادي رمز الكسر (البسط فوق المقام بينهما خط). كما ظهر الترميز للمجاهيل في المعادلات الجبرية (مـ للمال، شـ للشيء، جـ للجذر ...)

فنجد مثلا: 8 ـش لا 7 لـ 0 والتي تعني $8x - 7 = 0$.

ولقد نقل الأوربيون رمز الشيء حرفيا في القرون الوسطى في شكل (xei) ثم اختزل هذا الرمز وصار x للدلالة على المجهول. وانتقل الترميز إلى إيطاليا من طرف الرياضي الإيطالي فيبوناتشي (Fibonacci) واستمرت محاولات تحسينه، فنجد مثلا أن فيات (Viète) استخدم سنة 1591م الحروف المتحركة للتعبير عن المعلوم والحروف الساكنة للتعبير عن المجهول. ولهذا ينسب إلى الرياضي فرانسوا فيات أنه أول من استعمل الرموز الجبرية.

استعمل الرمزان (+)، (–) للدلالة على الجمع والطرح من طرف وايدمان (Widmann) سنة 1489م و استعمل الرمز (=) من طرف ركورد (Recorde) سنة 1557م.

أعمال الرياضي الفرنسي فيرما (1601م – 1655م) في مجال نظرية الأعداد: لم يكن فيرما متخصصا في مجال الرياضيات، بل كان حقوقيا، ويمارس الرياضيات كهواية في أوقات فراغه. ومع ذلك فقد ترك أبحاثا مهمة في مجال نظرية الأعداد، هوايته المفضلة (مع اهتمامه بالاحتمالات والهندسة)، وقد ترك معظم نظرياته دون برهان شأنه شأن رياضيي عصره، حفاظا على سمعتهم ومكانتهم. عثر على جل أعمال فيرما مبعثرة في أوراق، وعلى هوامش الكتب التي كان يطالعها.

* من بين الجهود التي بذلها فيرما في مجال نظرية الأعداد، محاولة إيجاد شكل عام للأعداد الأولية. لقد اعتقد فيرما أن الأعداد التي تكتب من الشكل $2^x + 1$ حيث ($x = 2^n$، n عدد طبيعي) هي أعداد أولية. لكن جاء فيما بعد أولر (1707م – 1783م) وأثبت أن عدد فيرما الموافق لـ (n = 5) ليس أوليا، حيث أنه لدينا:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

* ومن بين النتائج التي توصل إليها فيرما: "إذا كان n عددا أوليا، وكان a عددا طبيعيا كيفيا، فإن العدد n يقسم العدد $a^n - a$". وقد قدم أولر برهانا لهذه النتيجة بعد مرور قرابة قرن على طرحها.

* برهن فيرما على أنه: "إذا كان n عددا فرديا وأوليا، فإنه يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل فرق مربعين".

أي: $n = x^2 - y^2$ حيث: $x = \frac{n+1}{2}$ و $y = \frac{n-1}{2}$.

* طرح ديوفنطس القضية التالية: "إن مجموع مربعي عددين طبيعيين لا يمكن أن يكون من الشكل $4n - 1$". وأضاف إليها فيرما النتيجة: "إذا كان $a = b^2(4n - 1)$ حيث b,n عددان طبيعيان و $(4n - 1)$ عددا أوليا، فإنه من المستحيل كتابة a على شكل مربع أو مجموع مربعي عددين طبيعيين". ثم أضاف فيرما لها النتيجة التالية: "إذا كان عددين أوليين فيما بينهما فلا يمكن أن ينقسم العدد $x^2 + y^2$ على عدد أولي من الشكل $(4n - 1)$".

* ومن بين النتائج أيضا: "كل عدد أولي من الشكل $(4n+1)$ يكتب بشكل وحيد كمجموع مربعي عددين طبيعيين". وقد قدم أولر سنة 1754م و 1755م برهانا لهذه النتيجة بعد أن ضيع وقتا طويلا حسب قوله، وقد توصل فيرما سنة 1660م لهذه النتيجة، لكنها لم تنشر إلا سنة 1670م.

* ومن بين النتائج أيضا: "إذا كان x,y,z أعدادا طبيعية بحيث $x^2 = y^2 + z^2$ فإنه لا يمكن أن يكتب الجداء x.y على شكل مربع". برهن الرياضي الفرنسي لاغرنج (Lagrange) (1736م – 1816م) على هذه النتيجة كما حل المسألة التالية: "يطلب تعيين عدد طبيعي x بحيث يكون $x^2.n + 1$ مساويا لمربع، علما أن n عدد معطى لا يساوي مربعا".

* أما أشهر نظرية في المسماة بنظرية فيرما الأخيرة، فقد كتب فيرما – حوالي سنة 1637م – باللاتينية على هامش كتاب "أعمال ديوفونطس" ما ترجمته: "لا يمكن أن نقسم مكعبا إلى مكعبين، ولا مربع مربع إلى مجموع مربعي مربعين. وبصفة عامة لا يمكن أن نقسم قوة كيفية ذات أس أكبر من 2 إلى قوتين من نفس الأس. لقد اكتشفت برهانا رائعا لهذه القضية، لكن الهامش لا يسعه". ومعنى هذا الكلام أن المعادلات من الشكل $x^n + y^n = z^n$ (حيث n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3) لا تقبل حلولا طبيعية (في الحقيقة تقبل الحل التافه (0,0,0) لكنه حل غير مرغوب به في ذلك الزمن).

لم يترك فيرما سوى المبدأ الذي استخدمه في معالجة الحالة $(n = 4)$، ويسود الاعتقاد أن فيرما لم يكن لديه برهان كامل لنظريته، وإنما دعاه الحماس الزائد إلى كتابة ما كتب.

قضى الرياضيون حوالي ثلاثة قرون ونصف للإتيان ببرهان لهذه المخمنة، إلى أن أثبتها الرياضي أندريه وايلز بمساعدة أحد طلبته في منتصف عام 1995م. وتطلب منهما ذلك البرهان عددا كاملا (127 صفحة) من مجلة "Annal of Mathematics".

ثامنا: نبذة عن تاريخ مجموعات الأعداد:

* أطلق اسم الأعداد المزيفة قديما على الأعداد السالبة للإشارة إلى أنها ناتجة عن بعض المسائل التي تكون غير واقعية في طرحها. وقد بين الرياضي دالمبير (1717م – 1783م) قواعد استعمال الإشارة عند ضرب الأعداد الصحيحة النسبية حيث وضح أن جداء عددين سالبين تماما هو عدد موجب تماما كما ذكر أن وجود الإشارة (–) ناتج عن خطإ ما في المسألة المطروحة وأنه لو طرحنا المسائل بشكل صحيح نحصل دوما على أعداد موجبة.

* بقيت قاعدة استعمال الإشارة مستعملة حتى الآن، رغم أن تبريرها قد يستعصي على فهم الكثير وقد لا يروق لبعضهم. أما بالنسبة للقوى السالبة فإننا نجد أول استعمال لها سنة 1484م من طرف الرياضي شوكيت (Chuquet)، الذي كان أيضا قد تمكن من إيجاد بعض الحلول السالبة لمجموعة من المسائل.

* انطلقت النظريات الحديثة لمجموعة الأعداد الحقيقية من أعمال الرياضي غوص سنة 1812 م وبولزانو سنة 1817 م وصيغت من طرف الرياضي الشهير كوشي في كتابه (دروس التحليل للمدرسة المتعددة التقنيات).

* قام كانتور (Cantor) سنة 1882م بإثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد، وقد قدم بذلك خطوة عملاقة حول نظرية المجموعات وقوة المستمر. تجدر الإشارة أن هذه الأبحاث لم ترق لرياضيي ذلك العصر، وانتهى الأمر بكانتور إلى أن قضى بقية حياته في مستشفى الأمراض العقلية.

* قام بيانو بعرضِ الرياضيات بشكل يشبه عرض إقليدس في كتاب الأصول (بديهيات، مسلمات، تعاريف)، فصاغ مسلمات تتعلق بالأعداد الطبيعية، ومسلمات الفضاء الشعاعي على جسم الأعداد. كما قدم أبحاثاً وأعمالاً مهمة في نطاقِ الرياضيات التطبيقية، وفسر أشياء عديدة كانت تـعتبر مبهمة.

* في سنة 1872م نشر ديدكيد كتابه (الاستمرارية والأعداد الصماء) وضح فيه ما توصل إليه من أبحاث في هذا المجال.

* قام ديدكيند وفيشتراس وكانتور حوالي سنة 1872 م بتعريف مجموعة الأعداد الحقيقية وتوصلوا إلى خواصها (العمليات الحسابية والمقارنة ...) انطلاقا مجموعة الأعداد الناطقة باتباع طرق مختلفة. وهكذا رد تعريف مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الناطقة ثم إلى مجموعة الأعداد الطبيعية.

* قام ديدكيند سنة 1888 م ثم بيانو سنة 1891 م لأول مرة بصياغة مسلمات الأعداد الطبيعية، وانطلاقا من هذا تم التطرق إلى خواص الأعداد الطبيعية، ثم إنشاء باقي المجموعات، وتمديد خواص مجموعة الأعداد الطبيعية إلى هذه المجموعات (وهي: $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$).

* حضر الرياضي بيانو الملتقى الشهير سنة 1900م الذي قدم فيه الرياضي هيلبرت 23 مسألة مفتوحة أمام الرياضيين للبحث واهتم بالمسألة الثانية التي تتعلق بالانسجام المنطقي وعدم التناقض للمسلمات الخمس التي أنشئت بها مجموعة الأعداد الطبيعية.

* وفيما يخص الأعداد المركبة، فقد استخدم مفهوم العدد التخيلي من طرف الرياضي الفرنسي ديكارت (1596م – 1650م) سنة 1637م، واستخدم الرمز i من طرف أولر سنة 1777م. واستعملت طويلة عدد مركب سنة 1806 من طرف السويسري أرغاند (1768م – 1822م)، وأدخل الرياضي الفرنسي كوشي (1789م – 1857م) سنة 1838م مفهوم العمدة، كما أن الرياضي الفرنسي غوص (1777 - 1855) استخدم سنة 1831 الرمز N(z) للدلالة على مربع الطويلة، أما فايشتراس (1815 - 1897) فقد استخدم الرمز $|z|$ للدلالة على الطويلة.

* قدم التمثيل الهندسي لعدد مركب من طرف الرياضي الدانماركي ويسل (1745 - 1818) سنة 1798، ثم من طرف أرغاند سنة 1806 دون أن تجد التمثيلات الصدى المطلوب، إلى أن جاء غوص وكوشي لينشراها فيما بعد.

تاسعا: نبذة عن تاريخ الجبر الحديث:

* منذ الإعلان عن خوارزميات حل المعادلات من الدرجة أقل من 4 بدأت محاولات غير ناجحة في البحث عن قوانين يعبر بها عن جذور المعادلات من الدرجة الخامسة، ومن درجات أعلى، واستمرت هذه المحاولات إلى بداية القرن 19م، حيث تم أخيرا إثبات استحالة الوصول إلى مثل هذه القوانين.

* ولقد حدثت في القرنين 17م و 18م دراسة شاملة ومستمرة للنظرية العامة للمعادلات (أي لنظرية كثيرات الحدود)، شارك فيها مشاهير الرياضيين في ذلك الوقت، منهم الفرنسي ديكارت، والإنجليزي نيوتن (1643 – 1727)، والفرنسيان دالمبير ولاغرانج.

* وفي القرن 18م بدأ بناء نظرية المحددات من طرف السويسري كرامر (1704 – 1752)، والفرنسي لابلاس (1749 – 1827). وفي أواخر القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر أثبت الألماني غوص النظرية الأساسية عن وجود جذور للمعادلات ذات المعاملات العددية.

* وقد تم إثبات استحالة إيجاد قوانين لحل المعادلات ذات الدرجة أكبر أو تساوي 5 من طرف الإيطالي روفيني (1765 – 1822)، وبصورة أدق النرويجي آبل (1802 – 1829)، ثم جاء دور الرياضي الفرنسي غالوا (1811 – 1832) سنة 1830م ليعطي الإجابة المستفيضة عن مسألة الشروط الواجب توفرها لكي يمكن حل معادلة بواسطة علامات الجذور، وكانت أبحاثه – التي أهملت في بداية الأمر – بداية فرع شديد الأهمية من فروع الجبر، هو البنى الجبرية. ثم جاءت أبحاث الألمانية نيوتر (1882 – 1935) لتؤدي إلى صياغة وجهة نظر جديدة في مشاكل علم الجبر.

* وقد كانت نظرية غالوا دفعة كبيرة لتطوير الجبر واتجاهاته الجديدة، في منتصف القرن التاسع عشر، وفي النصف الثاني منه. ومن الرياضيين المؤثرين في مجال نظرية الزمر نجد الألمانيين كومر (1810 – 1893)، وكرونيكر (1823 – 1891)، والروسيين زولوتاريف (1847 – 1887)، وفورونوف (1868 – 1908). وقد حصلت نظرية الزمر المنتهية التي بدأها لاغرانج وغالوا على تطوير كبير، وذلك بفضل الرياضيين الفرنسيين كوشي، وجوردان (1838 – 1822)، والنرويجي سيلوف (1832 – 1918)، والألمانيين فروبينيوس (1849 –

1918)، وجولدر (1859 – 1937). ولقد وضعت أبحاث الرياضي النرويجي لي (Lie) (1842 – 1899) بداية نظرية الزمر المستمرة.

* وبالنسبة للحساب الشعاعي نجد أنه تطور مع علم الحركيات في أعمال نيوتن وغيره.

ومن بين ما يمكن الإشارة إليه أن الرياضي ستيفن (Stevin) استعمل لأول مرة الرمز $\overline{AB}$ للتعبير عن الشعاع الممتد من النقطة A نحو النقطة B وذلك في ترميزه للقوى وبقي هذا الرمز مستعملا إلى غاية 1930 م حيث استعمل الرمز $\overrightarrow{AB}$.

كما قام الرياضي جيبس في سنة 1881م بدراسة التحليل الشعاعي ثلاثي الأبعاد

* أما الجبر الخطي فقد ازدهر في القرن التاسع عشر، ودلك بفضل الإنجليزيين سيلفيستر (1814 – 1897)، وكايلي (1821 – 1895)، وقد كان استعمال المصفوفات في بداية الأمر في حل الجملة الخطية لثلاث معادلات ذات مجهولين، وذلك من طرف الألماني ليبنيتز (1646 – 1716)، واستعمل الرياضي غوص رمزا شبيها بالرمز الحالي (رمز المصفوفات دون استعمال الأقواس)، وإليه تنسب الطريقة المعروفة بطريقة حذف غوص. واستعمل الرمز الحالي للمصفوفة من طرف الرياضي كايلي سنة 1858.

* طرح كوشي في كتابه سنة 1826 مسألة اختصار شكل تربيعي، ليصل إلى كثير الحدود المميز لشكل ثنائي الخطية المرفق بشكل تربيعي.

* أدت أعمال الرياضي الروسي لوباتشوفيسكي (1792 – 1856) حول الحل التقريبي للمعادلات، والألماني جورفيتش (1859 – 1919)، إلى ظهور فرع جديد يسمى بالهندسة الجبرية، تطور في المنتصف الثاني من القرن بدأ بفضل الألمانية نيوتر.

نبذة عن تاريخ الهندسة

الهندسة كلمة فارسية معربة وهي "اندازه" وتعني المقادير وتعرف في اليونانية بـ "الجومطريا" التي تعني صناعة المساحة.

أولا: الحضارة البابلية:

اكتشف البابليون مساحة المربع والمستطيل وشبه المنحرف والمثلث، وحجم متوازي المستطيلات والأسطوانة القائمة والموشور، كما اكتشفوا أن الزاوية المرسومة في نصف دائرة قائمة، كل ذلك دون برهان.

ومن بين المسائل المطروحة سؤال عن مثلث عرفت قاعدته b، وفيه قطعة مستقيمة طولها ℓ توازي القاعدة، ويقسم المثلث إلى مثلث وشبه منحرف، والفرق بين مساحتيهما s، والفرق بين ارتفاعيهما a. وفي الحل يحسبون ℓ من العلاقة $\ell = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b-\frac{s}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a}\right)^2} + \frac{s}{a}$، ثم يجدون ارتفاع شبه المنحرف a_1 من العلاقة $a_1 = \frac{\ell - b}{2\ell - b}a$.

ثانيا: الحضارة المصرية:

كان شيخ مؤرخي الإغريق هيرودوت (Herodote) (484 ق.م– 420 ق.م) يقول: "زعموا أن سيزوستريس قسم الأراضي على السكان قطعا مربعة متساوية، وفرض على كل واحد إيجارا سنويا، فكانوا كلما فاض النيل على أرضهم ذهب أحدهم إلى الملك، فيرسل من يقيس الأرض ويقدر الخسارة، وبنسبة ذلك يخفض الإيجار. يبدو لي أن هذا هو السبب في أن مصر سبقت غيرها في معرفة الهندسة وعنها أخذها الإغريق". ففيضان النيل سنويا يلزمهم بإعادة رسم هذه الحدود، مما جعلهم يلمون بكثير من الخصائص الهندسية للأشكال (وإن كانت الأسطورة غير مؤكدة وقد شكك فيها بعضهم).

عرف المصريون مساحة المثلث والمستطيل وشبه المنحرف والدائرة، وحجم المكعب ومتوازي المستطيلات والموشور والأسطوانة وهذا دون جود البرهان. وكانت لديهم أيضا قواعد خاطئة، كقاعدة حساب مساحة الشكل الرباعي.

ثالثا: الحضارة الصينية:

كان هناك مدرستين فكريتين استطاعتا أن تلعبا دورا هاما في مجال الهندسة:

المدرسة الأولى: مدرسة الفلاسفة أو مدرسة السفسطائيين (sofhiste) ومن أهم شخصياتها "هويشي" (Shi Hui) (300 ق.م–380 ق.م) وكذلك " غونغسين لنغ " (Gongsun Long) (320 ق.م–250 ق.م).

المدرسة الثانية: مدرسة " مويست " (Mohiste) ومن أهم شخصياتها " موزي " (Mozi)

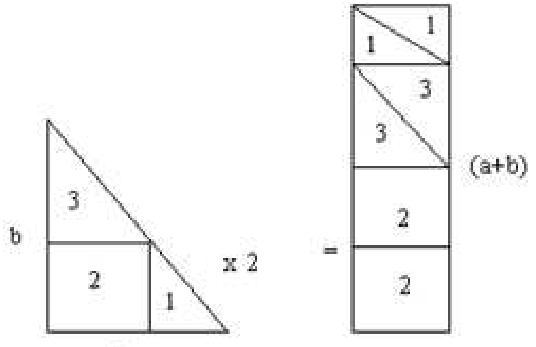
فالمدرسة الأولى كان البحث يجد صعوبة من الناحية التطبيقية، في حين أن المدرسة الثانية كانت الوضعية مختلفة لأن " مويست " قام بتعريف وتحديد العديد من المفاهيم الهندسية التي يمكن تقريبها من نظيرتها الإقليدية.

1) الهندسة المستوية:

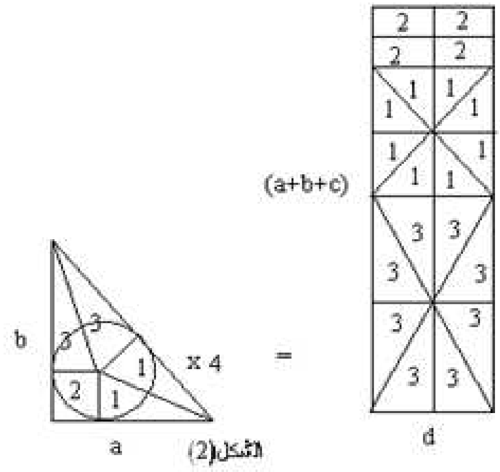
* **حساب مساحة قرص:** قام "جيوزنغ سيونش" (Jiuzheng Suansh) بفرض أربع علاقات لحساب مساحة قرص، اثنتان منها متطابقتان ولمها جانب من الدقة وهما: $S=\frac{d\ell}{4}$، $S=\frac{d}{2}.\frac{\ell}{2}$ حيث ℓ محيط القرص، d قطره.

وهناك علاقة أخرى نحصل فيها بعد حسابات طويلة على العلاقة $S=\left(\frac{157}{200}\right)d^2$ وهي تشبه العلاقة المعروفة بأخذ $\pi\simeq\frac{157}{200}=3,14$.

*** حساب مساحة مثلث قائم:**



الشكل(1)



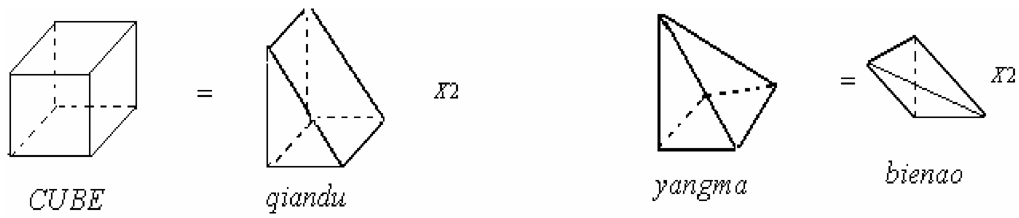
الشكل(2)

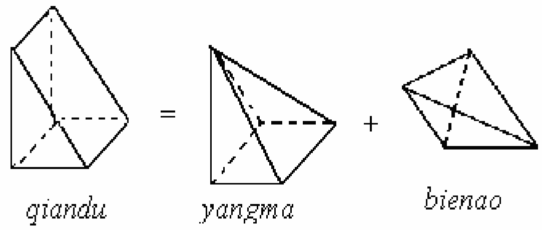
c هي طول ضلع المربع الموجود داخل المثلث القائم وd قطر الدائرة التي توجد داخل المثلث القائم كما هو موضح في الشكل أعلاه.

الطريقة الأولى: ننشئ مربعا طول ضلعه c (معلوم) داخل المثلث القائم المعني ثم نضاعف هذا المثلث مرتين ونقوم بدمجها كما هو موضح في الشكل (1) فنحصل على مستطيل عرضه c وطوله $(a + b)$ الذي مساحته على الشكل التالي : $c(a + b)$ وبقسمة هذه المساحة على 2 نحصل على مساحة المثلث القائم

الطريقة الثانية: ننشئ دائرة قطرها d (معلوم) داخل المثلث القائم المعني ثم نضاعف هذا المثلث 4 مرات ونقوم بدمجهم كما هو موضح في الشكل (2) فنحصل على المستطيل عرضه d وطوله $(a + b + c)$ الذي مساحته على الشكل التالي:$d(a + b + c)$ وبقسمة هذه المساحة على 4 نحصل على مساحة المثلث القائم.

2) الهندسة الفضائية: اهتم الصينيون بحساب حجوم الأجسام الصلبة ومن أشهر العلماء الذين برعوا في هذا المجال نذكر منهم " ليوهوي " (Liu Hui) الذي قام بحساب حجم الشكل المكعب باستخدام الطريقة التالية: تجزئة المكعب إلى موشورين متماثلين، ثم نجزئ كل موشور إلى هرمين





ويصبح العمل ملخصا كما يلي:

❋ مكعب = موشورين (qiandu)

❋ موشور = هرم مائل قاعدته رباعية + (yangma) هرم قاعدة ثلاثية (bienao).

❋ هرم مائل قاعدة رباعية = هرمين قاعدة ثلاثية.

رابعا: الحضارة اليونانية:

1) **ظهور البرهان:** مما أوجدته الحضارة اليونانية ونظّمت به أصول الهندسة البرهان الرياضي فمن خلاله ميزوا بين الصواب والخطأ.

وقد بدأ ظهور البرهان الرياضي على يدي فيثاغورس (Pythagore) (القرن 5 ق.م) ومدرسته، إذ يعتبر أول من سعى إلى بناء الهندسة النظرية، وصياغة المبادئ العامة، وتحديد المفاهيم. فعرّف في مدرسته الخط على أنه ذو طول وليس له عرض ولا سمك، والدائرة بأنها خط كل نقاطه متساوية البعد عن المركز والمماس على أنه خط يلتقي مع الدائرة في نقطة واحدة وكل هذه المفاهيم مجردة تعرّضت للنقد والمناقشة، لكن تطور الهندسة بشكل كبير جعل هذه الاعتراضات تتلاشى.

ومن بين الذين تقبّلوا مبادئ هذه الهندسة وعملوا على تطويرها، الفيلسوف اليوناني أفلاطون (Platon)(ت.347 ق.م) إذ يقول : (إن الدائرة التي يرسمها المرء ليست هي التي يحدّها علم الهندسة النظرية).

وممن ساهم أيضا في بناء هذه الهندسة أرسطو (Aristote) (ت 322 ق.م) فقد قال عن الأشياء التي تبحث فيها الرياضيات: (إنها حقا ليست ما نراه في عالم الواقع وما نراه في عالم الواقع ليس ما تعنى به الرياضيات. إن كل نوع من أنواع المعرفة يتناول أشياء محسوسة إنما هو نوع من الفيزياء من دروس الطبيعة وأشياء الطبيعة فيها النقاط والخطوط والسطوح والأجسام، وتلك هي ما يهم الرياضي. وهو يتناول هذه التي تهمه لا كما هي في الطبيعة وإنما باعتبارها أفكار مجردة من كل خصائصها الحسية. فهي إذن ليس لها وجود إلا في عالم الفكر).

وقد اشترط أرسطو في سبيل بناء المنهج العلمي، أن تبنى المعرفة عن طريق البرهان الذي يقوم على البديهيات والمسلمات والتعاريف.

2) إقليدس وكتاب الأصول:

أقليدس رياضي وهندسي إغريقي لا نعرف عن حياته الخاصة شيئا، سوى أن بطليموس الأول الذي حكم مصر بين(323 ق.م □ 285 ق.م) استدعاه لتأسيس مدرسة الرياضيات في مكتبة الإسكندرية.

وكتاب الأصول هو أهم كتاب وضعه أقليدس، وقد ألّم فيه بأسس الهندسة المستوية وكان محل اهتمام كثير من العلماء لفترة طويلة.

ووضع هذا الكتاب في ثلاثة عشر جزءا، سماها العرب مقالات وكل مقالة تشتمل على مجموعة من البديهيات والمسلمات والتعاريف والمبرهنات التي سماها العرب أشكالا. وفي عمله هذا سار اقليدس على منهج أرسطو العلمي، وذلك على النحو التالي:

1. أن يبدأ كل مقالة بتعريفات تحدد كل ما تشتمل عليه المقالة من مفاهيم جديدة.
2. في المقالة الأولى ثلاثة وعشرون تعريفا وتسع بديهيات وخمس مسلمات.

التعاريف: نذكر منها:

- النقطة : هي شيء لا جزء له.
- الخط : ذو طول فقط.

- البسيط(السطح): ذو طول وعرض فقط.

- الزاوية البسيطة المستقيمة الخطين: هي انحراف أحدهما عن الأخر، موضوعين على غير استقامة.

- الزاوية القائمة: إذا قام خط مستقيم على خط مستقيم، فصيّر الزاويتين اللتين على جنبتيه متساويتين، قيل لكل واحدة منهما زاوية قائمة والخط القائم يقال له عمود.

- الدائرة: هي شكل مسطح يحيط به خط واحد، في داخله نقطة وكل الخطوط المستقيمة التي تخرج منها وتنتهي إلى ذلك الخط مساو بعضها لبعض.

- التوازي: إن لم يقم أحد الخطين على الأخر البتة، وإن أخرجا في كلتا الجهتين بلا نهاية وهما في سطح واحد فيقال لهما المتوازيان.

البديهيات:

1. الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية.
2. إذا أضيفت أشياء متساوية لأشياء متساوية كانت النتائج متساوية.
3. إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء متساوية كانت البواقي متساوية.
4. إذا أضيفت أشياء متساوية لأشياء غير متساوية كانت النتائج غير متساوية.
5. إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء غير متساوية كانت النتائج غير متساوية.
6. الكميات المساوية لضعف نفس الكمية هي متساوية فيما بينها.
7. الكميات المساوية لنصف نفس الكمية هي متساوية فيما بينها.
8. الأشياء التي تتطابق متساوية.
9. الكل أعظم من الجزء.

المسلمات:

1. مد أي مستقيم يصل بين أي نقطتين مفروضتين.
2. مد أي مستقيم محدود على استقامته بقدر ما نشاء.
3. رسم دائرة حول أي مركز وبأي نصف قطر.

4. كل الزوايا القائمة متساوية.

5. إذا وقع خط على خطين فكان مجموع الزاويتين الداخليتين في أي من جهتيه أقل من قائمتين فإن الخطين إذا مدا في تلك الجهة يلتقيان.

وهذه البديهيات والمسلمات والتعاريف صالحة لكل مقالات الكتاب.

وقد نظّم إقليدس هذا الكتاب فجعل لكل مقالة موضوعا خاصا بها فكانت:

المقالة الأولى: تتضمن 23 تعريفا وثمان و40 مبرهنة، تدرس خصائص الأشكال مستقيمة الأضلاع ونظرية التوازي وتحويل بعض المضلعات إلى مضلعات أخرى عن طريق المساحات.

المقالة الثانية: تحوي تعريفين و 14 مبرهنة، تحدد خصائص بعض العمليات الحسابية كالجمع والضرب وهذا باستخدام مساحة الأشكال الهندسية، وتدرس بعض العلاقات في مثلث.

المقالة الأولى والثانية تعالج ضمنيا حلول المعادلات من الدرجة الثانية هندسيا.

المقالة الثالثة: تتضمن 15 تعريفا و 37 مبرهنة، تدرس خصائص الدائرة من حيث المركز والأوتار والمماسات وتحديد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.

المقالة الرابعة: تتضمن 7 تعاريف و 16 مبرهنة تدرس علاقة الدوائر بعضها ببعض وإحاطة المضلعات بها أو إحاطتها بالمضلعات.

المقالة الخامسة: تتضمن 18 تعريفا و 25 مبرهنة، تدرس التناسب.

المقالة السادسة: تتضمن 4 تعاريف و33 مبرهنة، تدرس ما جاء في المقالات الأولى باستعمال نظرية التناسب.

المقالة السابعة: تتضمن 22 تعريفا و39 مبرهنة، تدرس نظرية الأعداد فتعالج القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر والأعداد المتناسبة والأولية والزوجية.

المقالة الثامنة: تتضمن 27 مبرهنة، وهي تكملة لنظرية الأعداد، تدرس المتتاليات الهندسية والوسط الهندسي.

المقالة التاسعة: تتضمن 36 مبرهنة، تواصل دراسة المتتاليات الهندسية وكيفية جمع حدودها.

المقالة العاشرة: تتضمن 4 تعاريف و115 مبرهنة، تدرس الأعداد الصماء.

المقالة الحادية عشر: تتضمن 28 تعريفا (تخص المقالات الباقية) و39 مبرهنة، تدرس الهندسة المجسمة (الخطوط والزوايا والسطوح والمجسمات ذات السطوح المتوازية).

المقالة الثانية عشر: تتضمن 18 مبرهنة، تدرس الهندسة المجسمة (حجم الهرم والمخروط والموشور والأسطوانة وعلاقتها ببعضها البعض).

المقالة الثالثة عشر: تتضمن 18 مبرهنة، تدرس المجسمات الخمسة ذات السطوح المنتظمة وهي الهرم، المكعب، ثماني الوجوه، الاثني عشر، العشروني وإمكانية رسمها داخل كرة.

أما منهجية إقليدس في عرض المبرهنات فتتمثل في:

1. إعطاء نص المبرهنة.
2. إعطاء قانون خاص، يتمثل بشكل محدد بحروف أبجدية، ونص يبين أن الشكل يطابق ما في نص المبرهنة، مبينا المعطيات والمطلوب.
3. إعطاء البرهان عن طريق الإنشاء الهندسي بواسطة المدور والمسطرة.
4. ثمّ يأتي نص يبين أن المبرهنة قد تحققت، ويعقب ذلك عبارة "وهذا هو المطلوب".

وبهذا نجد أن إقليدس يعرض حل المبرهنات دون أن يذكر كيف حصل عليه، معتمدا على الطريقة التركيبية، إلا أنه في بعض البراهين يعتمد على الطريقة التحليلية بالبرهان بالخلف وهذا ما نجده في المبرهنة الأولى من المقالة السابعة.

3) أعمال أخرى:

* من بين العلاقات الشهيرة نجد العلاقة المنسوبة لطالس (624 ق.م □ 548 ق.م) والمتعلقة بمستقيمين متوازيين وقاطعين لهما. وقد طبقها في قياس ارتفاع بناء، أو بعد سفينة عن الشاطئ ...

* بين أرخميدس (287 ق.م □ 212 ق.م) أن مساحة الكرة هي ثلثا مساحة أسطوانة تمس حوافها وارتفاعها هو نصف قطر الكرة. من مؤلفاته: تربيع القطع المكافئ، كتابان حول الكرة والأسطوانة، قياس الدائرة، اللوالب الحلزونية، كتاب أشباه المخروطات وأشباه الأكر.

* استعمل اليونان تحويلات نقطية مناسبة في أبحاثهم الهندسية: فقد استخدم أرخميدس التآلف لحساب مساحة إهليلج (قطع ناقص)، واستعمل أبولونيوس (Apollonius) التعاكس والتحاكي في مؤلفيه "الأمكنة الهندسية في المستوي"، و"المخروطات".

* من بين المسائل الشهيرة التي شغلت بال الرياضيين اليونان ومن أتى بعدهم:

تربيع الدائرة: أي إنشاء مربع بواسطة المسطرة والمدور، مساحته تساوي مساحة دائرة معلومة، وقد تبين مؤخرا أن المسألة ليس لها حل.

تضعيف المكعب: أي إنشاء حرف مكعب بواسطة المسطرة والمدور، بحيث يكون حجمه يساوي ضعف حجم مكعب مفروض.

تثليث الزاوية: أي إنشاء أنصاف مستقيمات، تجزئ زاوية إلى ثلاث زوايا متقايسة بواسطة المسطرة والمدور.

المضلعات المنتظمة: أي إنشاء المضلعات المنتظمة بواسطة المسطرة والمدور. وقد ذكر إقليدس في مؤلفه المضلعات ذات: 3، 4، 15، وأشار إلى المضلعات ذات: 6، 6، 10، 30 (ضعف عدد الأضلاع السابقة).

خامسا: الحضارة العربية الإسلامية:

1) الخوارزمي والمساحات: عقد الخوارزمي في كتاب "الجبر والمقابلة" بابا اسمه باب المساحة، وقد اعتمد كوحدة أساسية للمساحة مساحة مربع طول ضلعه ذراع، ويستعمل الخوارزمي مصطلح "التكسير" للدلالة على المساحة، ومن بين الأشكال التي ذكر قواعد حساب مساحتها:

المربع: مساحته هي الضلع في الضلع.

المستطيل: مساحته هي الطول في العرض.

المثلث متقايس الأضلاع: مساحته هي جداء الارتفاع مع نصف القاعدة.

المعين: مساحته هي جداء طول أحد القطرين في نصف الآخر. فإن عرف طول أحد الأضلاع مع أحد القطرين، فيرجع الأمر إلى حساب مساحة مثلث.

المربع الشبيه بالمعين(متوازي الأضلاع): ترجع مساحته إلى حساب مساحة مثلث.

ثم يذكر الخوارزمي خواص المثلثات وحساب مساحتها.

والجدير بالذكر أن ذكر الخوارزمي لحساب المساحات لم يكن مستقلا عن علم الجبر، كما أنه تعرض لمفهوم العدد الأصم كقطر لمربع.

2) قسطا بن لوقا البعلبكي وكتاب المدخل: عرف قسطا بن لوقا البعلبكي كمترجم للكتب اليونانية(طب، فلك، فلسفة، رياضيات)، ومؤلفه "المدخل إلى صناعة الهندسة" له علاقة بما كتبه إقليدس، حيث إنه جعل هذا الكتاب مدخلا إلى كتاب "الأصول"، ووضعه على صيغة السؤال والجواب، وبرر ذلك بقوله: (لما في ذلك من سهولة الفهم وتقريب المعاني).

قسم قسطا بن لوقا كتابه إلى ثلاث مقالات:

المقالة الأولى: تبحث في الخطوط والزوايا وأنواعها.

مثال: ما الخط المقوس؟

هو الذي لا يمكن أن تفرض عليه ثلاث نقط على سمت واحد. وتوجد نقطة تكون الخطوط المستقيمة الخارجة منها إليه متساوية.

المقالة الثانية: تبحث في البسائط (السطوح) وأنواعها.

مثال: ما البسائط؟

هي طول وعرض بلا عمق، ونهاياته خطوط.

المقالة الثالثة: تبحث في الأجسام وأنواعها وخواصها.

مثال: كم أنواع الأجسام؟

ثلاثة: منها ما يحيط به بسائط مسطحة، ومنها ما يمكن أن تحيط به كرة، ومنها ما لا يمكن أن تحيط به كرة.

3) الإنشاءات الهندسية:

* قام أبو الوفاء البوزجاني (940م – 998م) بحل مسائل مستعصية على الإغريق والهنود باستخدام المسطرة والمدور، وقد ألف في ذلك كتابا اسمه "ما يحتاج إليه الصانع من عمّال الهندسة"، استفاد فيه من مؤلفات إقليدس وأرخميدس وهيرون، وركز على المسائل المستعصية عند الإغريق، مثل تضعيف المكعب، ومحاولة تثليث الزاوية، وتربيع الدائرة.

ولم تتوقف جهود البوزجاني عند هذا الحد، بل كانت له أعمال تركت أثرا كبيرا في فن الرسم، حيث وضع كتابا اسمه "كتاب في عمل المسطرة والبركار والكونيا"، وقد ترجم الأوروبيون هذا الكتاب وسمَّوه "Geometrical Construction"، وبفضل هذا الكتاب تقدم علم أصول الرسم تقدمًا واسعًا.

* قام القوهي (الذي اشتهر بصنع الآلات الرصدية، وإجراء الأرصاد الدقيقة) بتأليف كتب في هذا المجال منها: "كتاب مراكز الأكر"، "البركار التام والعمل به"، الذي أعطى فيه طريقة نظرية مفصلة لرسم القطوع المخروطية المختلفة بوضعيات معينة لهذه الآلة. غير أنه لم يقدم صورتها ولا كيفية صناعتها عمليا.

* ومن بين الذين تناولوا آلة البركار التام نجد أبا نصر بن عراق (حوالي القرن 11م)، حيث حكى عن البركار التام ووصف حركته ضمن كتاب ألفه في "المسائل الهندسية"، مستندا في وصفه هذا على عمل الكوهي حول البركار التام. كما تناوله أيضا: أوب الريحان البيروني (973 م □ 1043 م) في كتابه الاستيعاب، ومحمد بن عبد الجليل السجزي (ت 1024م) في كتابه "البركار المخروطي"، والحسن بن الهيثم (965 م □ 1039 م) في كتاب "بركار القطوع". كما ألف ابن الحسين مقالة هندسية دقيقة ومختصرة حول البركار التام، أهداها للسلطان صلاح الدين الأيوبي، وقد تضمنت صورا واضحة لأجزاء هذه الآلة، وكيفية تركيب عناصرها، وبنفس المبدأ الرياضي في كيفية استعمال هذه الوسيلة كما ورد عند الكوهي وغيره.

4) التحويلات النقطية:

* استعان ثابت بن قرة (834 م □ 961 م) وحفيده إبراهيم بن سنان بالتحويلات التآلفيه والتقايسات المألوفة، حيث أن إبراهيم بن سنان رسم في مؤلفه "مقالة في رسم القطوع الثلاثة" قطوعا ناقصة بواسطة التآلف، ورسم كذلك قطوعا زائدة، وذلك بالحصول على الكثير من نقاطها انطلاقا من النقاط الموافقة من الدائرة.

* عالج ثابت بن قرة التقايسات التي تحول إهليلجا قطراه a و b إلى دائرة نصف قطرها $\sqrt{ab}$ وذلك في كتابه "قطوع الأسطوانة وبسيطها". وبرهن أن قطعات من الإهليلج تتحول إلى قطعات بنفس المساحة من الدائرة الموافقة.

* كما أن إبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة استعمل في مؤلفه في "مساحة القطع المكافئ" تحويلا تآلفيا لمضلعات ومقاطع من قطع مكافئ اختياري.

* اقترح الفارابي وأبو الوفاء البوزجاني عددا من الإنشاءات الهندسية المعتمدة على التحاكي. وكرس القوهي واحدا من مسألتيه المعروفتين "مسألتان هندسيتان" ليبرهن على أن التحاكي يحول الدوائر إلى دوائر.

* كما نجد عند العرب استعمالا واسعا لمفهوم الإسقاط (خصوصا الإسقاط العمودي)، وذلك في مؤلفات حبش الحاسب والبيروني، وهو امتداد للأعمال اليونانية (بطليموس وديودور). وقد استغل العرب الإسقاط في تحديد اتجاه القبلة وصناعة الإسطرلاب.

* وبمرور القرن العاشر الميلادي فقدت التحويلات النقطية الكثير من أهميتها، باستثناء تلك التي كانت ضرورية لبناء الإسطرلابات وغيرها من الأدوات الفلكية.

سادسا: عصر النهضة وما بعده:

1) تأثير المؤلفات العربية على الغرب:

* أثرت الهندسة العربية تأثيرا بالغا في نمو الرياضيات الغربية. وكان كتاب "القياسات" لأبراهام برخيا (Abraham Bar Hiyya) (1070م – 1136م) أحد أوائل الأعمال الأوربية الغربية في الهندسة، وقد وضعه مؤلفه بالعبرية، ثم نقله أفلاطون (Platon) إلى اللاتينية، ويتضمن عدة قواعد حسابية هندسية وجبرية.

* وضع ليونارد البيزي (Léonard de Pise) (1170م – 1250م) كتابه "الهندسة" متأثرا بالمؤلفين العرب، ويحتوي هذا الكتاب على عدد من المبرهنات الهامة في الهندسة المستوية والهندسة الفضائية.

* وبعد فتح القسطنطينية (1453م) هرب كثير من اليونان البيزنطيين نحو أوربا الغربية حاملين معهم مخطوطات عربية. وقد وصل – على سبيل المثال – إلى إيطاليا مخطوطتان من "عرض إقليدس" المنسوب لشرف الدين الطوسي، ونشر المؤلف في روما انطلاقا من إحدى هاتين النسختين، وقد أثر محاولة برهان المسلمة الخامسة لإقليدس الواردة في هذا الكتاب تأثيرا واضحا في محاولة واليس (Wallis) وساكيري (Saccheri).

* ومع ذلك – وحسب معلومات المؤرخين – فإن الأوربيين بقوا يجهلون عددا من اكتشافات العلماء العرب التي اكتشفوها فيما بعد. فلم تترجم جميع أعمال الخوارزمي وثابت بن قرة وابن الهيثم إلى اللاتينية، كما أنهم لم يعرفوا شيئا عن أعمال البيروني، ومعظم أعمال الفارابي وأبي الوفاء البوزجاني في الإنشاءات الهندسية، وكذلك التحويلات النقطية التي استعملها ثابت بن قرة وحفيده إبراهيم بن سنان، وكذلك الرسائل المتعلقة بنظرية المتوازيات.

2) الهندسة التحليلية:

* عرفت التمثيلات البيانية للقطع المكافئ والقطع الزائد قبل أن تعرف الصيغة التحليلية لهذه الدوال فنجد أن الرياضيين الإغريق اهتموا بالقطوع المخروطية كما يظهر في كتاب المخروطات لأبولونيوس واستخدم الرياضيون العرب هذه التمثيلات في حل مسائل جبرية وهندسية كأعمال عمر الخيام مثلا.

* ولثابت بن قرة (834 م – 961 م) أعمال جلية وابتكارات مهمة في الهندسة التحليلية التي تطبق الجبر على الهندسة، كما يعد أبو الوفاء البوزجاني ممن مهدوا كذلك لتقدم الهندسة التحليلية، ولقد زاد على بحوث الخوارزمي زيادات تعتبر أساسا لعلاقة الهندسة بالجبر.

* يعد الرياضي الفرنسي ديكارت (1596 م – 1650 م) مع الرياضي والقانوني الفرنسي فيرما (1601 م – 1665 م) أول من أسس دعائم الهندسة التحليلية والتي تعتني بتقديم الأشكال والمنحنيات الهندسية عن طريق معادلات جبرية غير أن ديكارت لم يقدم سوى الإحداثيات الموجبة، التي أدخلها سنة 1637 م.

* ويذكر أن فيرما قد سبق ديكارت بفترة قصيرة في إبراز بعض مفاهيم الهندسة التحليلية إلا أن عمله لم ينشر إلا في سنة 1679 م. ولذا فإنه من المشهور أنه قد تم تطوير الهندسة التحليلية من طرف ديكارت ثم أخذت شكلها الحالي بفضل الرياضي الشهير أولر.

* وقد ألف ديكارت كتابين:

الكتاب الأول: يتحدث في الهندسة عن العلاقة بين الحساب والهندسة ويتلخص موضوعه في (كيف يمكن إيجاد العلاقة بين العمليات الحسابية والهندسية ؟).

الكتاب الثاني: يتحدث عن الخطوط المنحنية ويتلخص موضوعه في (ما هي الخطوط المنحنية التي يمكن أن نلقاها في الهندسة ؟).

كما اهتم أيضا بالموضوع الشهير في دراسة المنحنيات وهو موضوع المماسات لمنحن في نقطة منه وموضوع الناظم (العمودي على المماس) وقال عن المماس: (إني لا أتوانى عن القول أن هذا الموضوع هو الأهم والأجدى حسب اعتقادي. إنه الشيء الذي لم أتوقع أني سأبحث فيه في يوم ما في ميدان الهندسة).

3) التحويلات النقطية:

ظهرت في أوربا (القرن 18م) التحويلات التآلفية العامةفي أعمال كليرو (Clairaut) وأولر (Euler). وخلال القرن الموالي وضعت نظرية هذه التحويلات، وكذلك نظرية التحويلات الإسقاطية الأكثر عمومية في المستوي والفضاء. كما وضعت نظرية التحويلات المتعاكسة لموبيوس (Möbius) في المستوي أو في الفضاء.

4) الإنشاءات الهندسية:

* في سنة 1668م نشر جيمس غريغوري (Gregory) (1638 م □ 1675 م) برهانا على استحالة تربيع الدائرة، إلا أن برهانه كان غير صحيح باعتراف منه.

* برهن فرانسوا فيات (Viète) (1540 م □ 1603 م) أن إنشاء حلول معادلة من الدرجة الثالثة حين تكون حقيقية بواسطة المسطرة والمدور يعود إلى مسألة تثليث الزاوية. وقد تم البرهان على استحالة تضعيف المكعب وتثليث الزاوية من طرف الرياضي وينتزل (Wantzel) سنة 1837م، ونشر هذا العمل سنة 1937م في مذكرة بعنوان "بحوث حول وسائل التعرف عما إذا كانت مسألة هندسية تقبل الحل بواسطة المسطرة والمدور".

* منذ إقليدس لم يتمكن أي واحد من إنشاء مضلعات منتظمة أخرى غير المضلعات ذات الأضلاع (3، 4، 5، 15، 6، 8، 10، 30)، إلى سنة 1796م حيث برهن الألماني كارل فريديريك غوس (1777 م □ 1855 م) (Gauss) أن المضلع ذا 17 ضلعا يمكن إنشاؤه بالمسطرة والمدور. وقد قدم طريقة الإنشاء هذه إضافة إلى نظريته الشهيرة التي نشرها سنة 1801م والتي تميز المضلعات القابلة للإنشاء من غيرها، والتي تنص على أن: "المضلعات المنتظمة القابلة للإنشاء بالمسطرة والمدور هي المضلعات ذات n ضلعا حيث $n = 2^a$ أو $n = n_1.n_2...n_k2^a$، $a > 2$ و n_i هي أعداد فيرما التي تكتب على الشكل $1+2^{2^b}$ ".

* كتب الرياضي الإيطالي لورنز ماسكروني (Mascheroni) (1750 م □ 1800 م) سنة 1797م مؤلفا عنوانه "هندسة المدور"، ترجم إلى عدة لغات منها الفرنسيبة والألمانية. جاء في هذا الكتاب البرهان على النظرية التالية: "كل مسائل الإنشاء الهندسي التي تنجز بواسطة المدور والمسطرة يمكن إنجازها بواسطة المدور وحده". ومن بين المسائل التي طرحها ماسكروني، المسألة التي نشرت باسم نابليون، وهي مسألة إنشاء مركز دائرة مفروضة (نجهل موقعه) بواسطة المدور فقط.

* ومن جهة أخرى كان الرياضي الهولندي فرانس فان سكوتن (Schooten) (1615 م □ 1661 م) أول من بحث مسائل الإنشاءات الهندسية بواسطة المسطرة وحدها. وكانت أهم نتيجة توصل إليها هو النظرية التالية: كل إنشاء هندسي ينجز بالمدور والمسطرة يمكن إنجازه بالمسطرة وحدها، شريطة أن تعطى دائرة ثابتة في المستوي".

وقد ألف الرياضي شتاينر سنة 1833م كتابا عنوانه "الإنشاءات الهندسية التي تستعمل خطا مستقيما ودائرة ثابتة"، بحث فيه الإنشاءات التي يمكن إنجازها بالمسطرة وحدها دون اللجوء إلى المدور.

5) نظرية المتوازيات والهندسة غير الإقليدية:

أخذت نظرية التوازي والمسلمة الخامسة لإقليدس مكانا كبيرا في التاريخ منذ العصور اليونانية القديمة حتى ما قبل أقليدس، إذ أثارت هذه المسألة جدلا كبيرا عند الرياضيين اليونان حول صحتها أو عدم صحتها، لوجود خطوط تقترب من بعضها البعض دون أن تلتقي، كما هو الحال في القطع الزائد، ولذا قرروا عدم قبولها أو

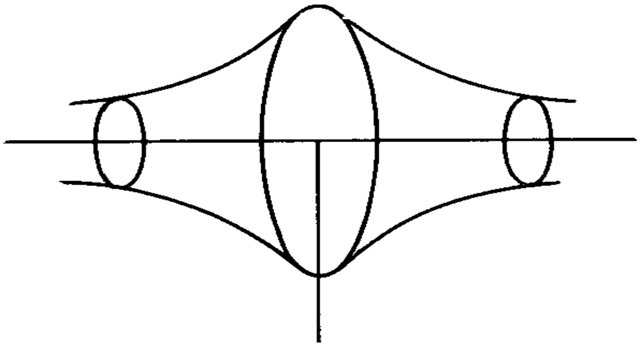
استعمالها دون برهان، فظهرت عدة محاولات للبرهان عليها، إما بطريقة مباشرة، أو باستعمال مبرهنات مكافئة لها، مبرهن عليها. نجد من بين هذه المحاولات: محاولة بطليموس، محاولة بروكلوس، محاولة أغانيوس، محاولة سمبليكيوس.

انتقل إشكال هذه المسلمة أيضا إلى البلاد الإسلامية، فقد ظهر لبعض الرياضيين أن هذه المسلمة غير واضحة، ويجب الاستغناء عنها، واستبدالها بمسلمة أخرى أوضح منها، ومنهم من رأى أنه من المستحيل الأخذ بهذه المسلمة دون البرهان عليها. كل هذا دفع الرياضيين في البلاد الإسلامية إلى محاولة إيجاد برهان لإثبات هذه القضية، ومن بين هذه المحاولات: محاولة الجوهري، محاولة ثابت بن قرة، محاولة الحسن بن الهيثم، محاولة عمر الخيام.

بقيت محاولات البرهان على المسلمة الخامسة لإقليدس فاشلة لفترة تزيد عن العشرين قرنا، وبقيت نظرية المتوازيات تطبق على نفس الحال الذي كانت تطبق عليه زمن إقليدس. ومع مطلع القرن الثامن عشر (بالضبط في عامي 1733 م و 1770 م) قدم على التوالي كل من ساكيري ولامبير طريقة للبرهان هي الاستدلال بالخلف. وكانا يعتقدان أن نفي المسلمة سيسمح لهما بالحصول على نتائج متناقضة، لكن هذا لم يحصل، مما عزز الاعتقاد أن نظريات أقليدس مستقلة عن هذه المسلمة.

في بداية القرن 19 م أصبح الكثير من الرياضيين مقتنعين بأنه لا يمكن البرهان على هذه المسلمة، وعليه فالهندسة الأقليدية ليست الوحيدة المنسجمة منطقيا. نتيجة لهذا جاءت محاولات ريمان ولوباتشيفسكي لبناء هندسات جديدة مغايرة للهندسة الأقليدية، سميت بالهندسات غير الأقليدية.

أ/ هندسة لوباتشيفسكي: تظهر محاولاته في المقالة التي قدمها يوم 01 فيفري 1826 لمعهد الفيزياء الرياضية بجامعة كازن، بالإضافة إلى المذكرات التي نشرها ابتداء من سنة 1929م، والتي أظهرت وبينت أن المسلمة الخامسة لإقليدس مستقلة عن المسلمات الأربعة الأخرى، وأنه بالإمكان بناء هندسة جديدة لا تستند إليها. وفي سنتي 1831م، 1834م وضع كل من بولاي، ولوباتشيفسكي (بشكل مستقل) هندسة سميت بالهندسة الزائدية، أو هندسة لوباتشيفسكي.



بعد أن وضع لوباتشيفسكي أسسا لهذه الهندسة، قام بتقديم نموذج أقليدي يوضحها وهو شبه الكرة (الموضح بالشكل)، والتي تنشأ بها يسمى بالمنحنيات الجاذبة. قدم لوباتشيفسكي المبرهنة التالية:

ليكن (D) مستقيما، ولتكن A نقطة خارج (D). يوجد عدد غير منته من المستقيمات التي تمر بـ A ولا تقطع (D).

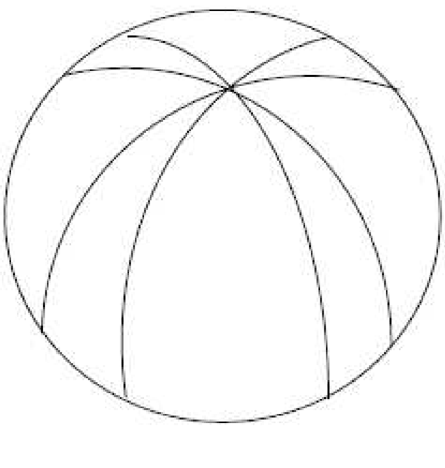
ب/ هندسة ريمان: انطلقت هندسة ريمان إثر محاضرة ريمان الملقاة سنة 1854م والمنشورة سنة 1867م. درس ريمان الفرضية العكسية:

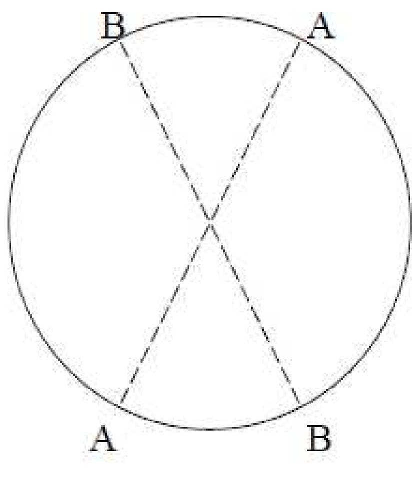
ليكن (D) مستقيما، ولتكن A نقطة خارج (D). لا يوجد أي مستقيم يمر بـ A ويوازي (D).

أسفرت هذه الدراسة عن ظهور ما سمي لاحقا بهندسة ريمان. قام ريمان بتمثيل هذه الهندسة على نموذج هو الكرة، أين يضع تعريفا آخر للنقطة والمستقيم، غير التعريفين المألوفين في الهندسة الإقليدية.

❋ النقطة هي زوج مركب من نقطتين على سطح كرة، متقابلتين قطريا.

❋ المستقيمات على الكرة هي دوائرها الكبرى (ما يسمى بخطوط الطول ودوائر العرض).





قام الرياضي الألماني فلكس كلاين عام 1872م بتصنيف هذه الهندسات، وأثبت أنه يمكن النظر إليها كهندسات إسقاطية على سطح مخروطي. ومن ثم جاء المصطلح الذي أدخله: الهندسة الزائدية لهندسة لوباتشيفسكي، والهندسة الناقصية لهندسة ريمان.

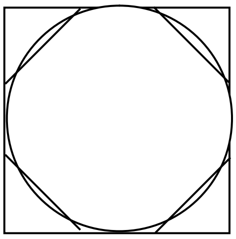
نبذة عن تاريخ حساب المثلثات

علم حساب المثلثات هو العلم الذي يدرس النسب المثلثين والعلاقات بينها، وقد ارتبط على مر التاريخ القديم والوسيط ارتباطا وثيقا بعلم الفلك (علم الهيئة).

والناظر إلى علم المثلثات يجد أنه كله علم عربي خالص. والأصل فيه هو البحث عن الأوجه المختلفة التي تنشأ عن النسبة التي تكون بين أضلاع المثلث. وقد اتصل في أول نشأته بعلم الفلك لكنه أخذ يستقل عنه ويختص بمادة بحثه وقد اخترع العلماء العرب له مفاهيمه فكانت مفاهيم رياضية دون أن تنتفي صلتها بعلم الفلك وأوجدوا للمفاهيم المصطلحات الدالة عليها فكان الجيب (Sinus) وجيب التمام (Cosinus) والظل (Tangeante). وقد عناهم البحث في المثلثات الكروية خاصة وتوصلوا إلى استخراج القواعد الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية وحل المسائل المتصلة بالمثلثات المائلة الزاوية.

ولكن هذا لا يمنع أن تكون له بعض الجذور المتفرقة في الحضارات القديمة، شأنه شأن علم الجبر.

أولا: الحضارة المصرية:



من بين ما وجد عند المصريين القدامى المسألة من بردية ريند:

* نرسم مربعا طول ضلعه 9.
* ثم نرسم داخله مثمنا.
* مساحة المثلثات الجانبية هي $4\times\frac{3\times3}{2}=18$.
* مساحة المربع هي 81.
* مساحة المثمن هي $81 - 18 = 63$.
* وهي بالتقريب مساحة مربع طول ضلعه 8.
* مساحة الدائرة S التي طول نصف قطرها r هي تقريبا مساحة مربع طول ضلعه $\frac{16}{9}r$

* فيكون $S=\left(\frac{16}{9}r\right)^2=\pi r^2$.
* ومنه: $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3.160493827...$.

ثانيا: الحضارة الصينية:

كان ليوهوي يعرف الدائرة من خلال الثنائية (قطرا محيط) وفي القرن(07م) كان لشومفونغ (Lishumfeng) يقول: (إذا كان طول قطر دائرة يساوي 7 فإن طول محيط الدائرة يساوي 22) أي الثنائية (7,22). كما نجد الثنائية (1250,3977)،.والثنائية (113,355) التي توافق القيمة الدقيقة لـ π بستة أرقام عشرية بعد الفاصلة والتي قام باكتشافها العالم (الكاشي) قبل ذلك في القرن 15م.

عمليا، كان الصينيون يستعملون العدد π مساويا للقيمة 3 إلى غاية القرن 19م لأنه كان يحقق معظم النتائج.

ثالثا: الحضارة اليونانية:

1) **أعمال هيباركس:** من بين إسهامات اليونان في حساب المثلثات نجد عمل هيباركس (150 ق.م)، فهو يعد أول من بحث في علم حساب المثلثات بطريقة منظمة للاستعانة بها في حساباته الفلكية. وكانت المسألة الخاصة التي تناولها هي تعيين طول وتر الدائرة الذي يقابل زاوية معلومة عند مركزها. ويقال إنه حسب جداول لهذه الأوتار، ولكن الكتاب الذي دونت فيه هذه الحسابات اندثر.

2) **أعمال بطليموس:** ثم جاء بعده الفلكي والرياضي بطليموس (130م)، فوضع كتابا في الرياضيات والفلك سماه العرب الذين ترجموه "المجسطي" (ومعناه المؤلف الكبير)، وقد ضمنه جدولا للأوتار، ونظريات هامة.

وتعتبر جداول بطليموس أول جداول فلكية وصلتنا، وقد اعتمد فيها على مبرهنتين:

المبرهنة الأولى: مجموع حاصل ضرب كل ضلعين متقابلين في أي شكل رباعي مرسوم داخل دائرة يساوي حاصل ضرب قطري هذا الشكل.

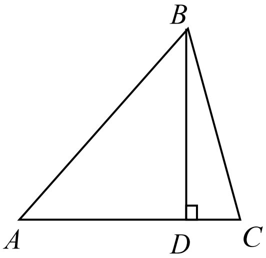
وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها أحد أضلاع هذا الشكل هو قطر الدائرة يمكن استنتاج ما يلي:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\sin\beta$$

المبرهنة الثانية: إيجاد وتر نصف القوس بمعرفة وتر القوس كله، ويمكن التعبير بـ: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\cos\frac{\alpha}{2}}$.

واستطاع بطليموس أن يضع جداول لأوتار الأقواس ابتداء من قوس $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ إلى قوس 180^0 بزيادة نصف درجة، وهو يكافئ جيوب الزوايا ابتداء من قوس $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ إلى قوس 90^0 بزيادة ربع درجة.

3) أعمال إقليدس: في كتاب الأصول يمكن ترجمة بعض المبرهنات بعلاقات مثلثية.



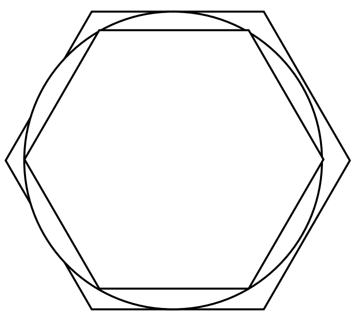
فمثلا: لدينا الشكل 13 من المقالة الثانية: "في المثلث الحاد الزوايا: المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية الحادة أصغر من مجموع المربعين المنشأين على الضلعين المجاورين للزاوية الحادة بضعف المستطيل المنشأ على أحد الضلعين المجاورين، الذي يسقط عليه العمود المستقيم المقطوع بالعمود باتجاه الزاوية الحادة".

يمكننا التعبير عن ذلك كما يلي:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC.\cos A$$

غير أن إقليدس لم يتعامل أبد مع جيوب الزوايا، بل استخدم نظرية فيثاغورس مرتين.

4) أرخميدس والعدد π: من بين الطرق المستعملة نجد طريقة أرخميدس، وذلك بواسطة مضلعات منتظمة مرسومة داخل وخارج دائرة قطرها يساوي وحدة الأطوال. وتعطي محيطات المضلعات الداخلية والخارجية على التوالي: القيمة الدنيا والقيمة العليا للعدد π . فمثلا:



n = 6: π محصور بين ...3,000 و ...3,464.

n = 12: π محصور بين ...3,105 و ...3,215.

n = 24: π محصور بين ...3,132 و ...3,195.

وهكذا من أجل n = 96 فإن قيمة π محصورة بين $3+\frac{10}{71}$ و $3+\frac{1}{7}$ (أي $\frac{22}{7}$ وهي قيمة شهيرة عند القدماء).

رابعا: الحضارة الهندية:

1) حساب المثلثات: أبرز إنجاز هندي في علم حساب المثلثات هو استبدال أوتار الأقواس بجيوب الزوايا، وهذا ابتداء من القرن 5م. وهذا التعامل كان مع زوايا المثلث القائم فقط.

كان الهنود يعرفون الجيب وجيب التمام، ووضعوا بعض الجداول المثلثية التي تتعلق بالجيب، وعن الهنود أخذ العرب لفظ الجيب بعد تحريفه (حيث أن أصله Ardeha Jiva بالسنسكريتية ومعناه نصف الوتر). وأما جيب التمام فكانوا يعرفونه باسم (Coti Jiva)، أي الباقي.

قام الأوربيون في القرن 12م بترجمة جيب التمام من العربية إلى اللاتينية sinus resiolui، واستبدل هذا الاصطلاح في القرن 15م إلى sinus complement، الذي اختصر فيما بعد إلى cosinus، ثم إلى cos المستعملة حاليا.

2) العدد π: تشبه طريقة الهنود في استخراج العدد π طريقة أرخميدس. قد قاموا برسم مضلع منتظم داخل دائرة، وعرفوا كيفية الانتقال من ذلك المضلع إلى رسم مضلع آخر داخل الدائرة، عدد أضلاعه ضعف عدد أضلاع المضلع الأول، ثم بحثوا في العلاقة بين طولي المضلع الأول والثاني، وقد استمروا في التضعيف من السداسي المنتظم وحتى المضلع ذي 384 ضلعا، وفي كل مرة كانوا ينسبون طول محيط المضلع إلى قطر الدائرة، فتوصلوا إلى قيم مقربة للعدد π، ومن ذلك القيمة التي أعطاها أريابهاتا: $\pi = 3+\frac{177}{1250} \approx 3{,}1416$.

خامسا: الحضارة العربية الإسلامية:

احتل علم حساب المثلثات مكانة هامة في الحضارة العربية الإسلامية، إذ كان حلقة وصل هامة بين الرياضيات والعلوم الأخرى (كالجغرافيا والفلك). وقد ابتدأ العرب بحوثهم في علم المثلثات بالتعرف على إنجازات الهنود واليونانيين في هذا المجال.

في حوالي 773م قام الفلكي أبو عبد الله محمد بن إبراهيم الفزاري بترجمة الكتاب الهندي "السند هند"، المتضمن لمعلومات فلكية ومثلثية. وفي القرن 9م تكت ترجمة كتاب "المجسطي" لبطليموس، و"الكرات" لمنلاوس، وأصبحت هذه الكتب المراجع الأساسية التي بنى عليها العرب بحوثهم.

1) أعمال الخوارزمي وحبش الحاسب: قام الخوارزمي بتأليف أحد الكتب الفلكية الأولى باللغة العربية، بالاستناد إلى المؤلفات الهندية واليونانية. ويتضمن هذا الكتاب أول الجداول العربية للجيوب والظلال، وقد ضاعت النسخة العربية ووصلتنا ترجمته إلى اللاتينية، المنجزة من طرف اديلاد الباثي في القرن 12م.

وقد كان مفهوم الظل وظل التمام معروفا عند أحد معاصري الخوارزمي، وهو أحمد بن عبد الله المروزي، المعروف بحبش الحاسب (ت 874م).

2) أعمال البتاني: هو محمد بن سليمان الحرّاني (850 م □ 929 م)، وكان من أحفاد ثابت بن قرة الصابئ.

اعتبر البتاني من أعظم علماء الفلك الرياضيين وهو ـ باعتراف أكثر محدثي الفلكيين ـ أول من أوجد جداول فلكية لها مستوى كبير من الأهمية ومن الإتقان والدقة ، يستعمل فيها علم المثلثات الجديد حينذاك بشكل واضح ويبدوا أن البتاني هو أول من وضع علم المثلثات لخدمة الفلك كما كان أول من أولى المثلثات الكروية العناية التامة.

وقد استعمل الأوروبيون مؤلفات البتاني في نهضة أُوروبا وعلى أساسها كانت الطرق الحديثة التي توصي بفصل علم حساب المثلثات عن علم الفلك.

3) أعمال أبي الوفاء البوزجاني: هو أبو الوفاء محمد بن يحيى البوزجاني (940م – 998م).

يعتبر أبو الوفاء البوزجاني من أكبر المساهمين في علم الفلك وحساب المثلثات، بل إن له لمسات جديدة فيه، تشبه ما وضعه الخوارزمي في الجبر.

قضى أبو الوفاء جُلَّ وقته في دراسة مؤلفات الرياضي البتاني في علم حساب المثلثات، فعلَّق عليها وفسر الغامض منها. ولذلك يقول سيديو: (إن أبا الوفاء البوزجاني ذلك العالم الذي يتردد اسمه كثيرًا خلال المناقشات الأكاديمية في أوروبا قد صحح أخطاء الفلكيين الذين سبقوه).

ابتكر أبو الوفاء طريقة جديدة في حساب جداول الجيب، وفي تلك الجداول حساب زاوية 30^0، وكذلك جيب زاوية 15^0 بطريقة فائقة الدقة صحيحة إلى ثمانية منازل عشرية. كما عرف لأول مرة الصلات في علم حساب المثلثات، وهو ما يعرف اليوم بالعلاقة $\sin(\alpha + \beta)$ وغيرها من الصلات بين الجيب (sin) والظل (tan)، كما يعتبر البوزجاني أول من ابتكر القاطع (sec).

وقد أوجد البوزجاني جداول لجيب الزاوية (sin) وظل الزاوية (tan) لكل عشر دقائق. وقد أولى أبو الوفاء المتطابقات المثلثية عناية كبيرة، وهي التي ما انفكت تلعب دورًا هامًّا في علم حساب المثلثات، وقد ابتكر عددًا منها:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\,.\sin^2\beta} + \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\,.\sin^2\beta}$$

انتحل كثير من علماء الغرب بعض اكتشافاته ونسبوها لأنفسهم مثل (ريجيو مونتانوس) الذي نسب لنفسه معظم نظريات أبي الوفاء في علم حساب المثلثات، وكتبها في كتابه المشهور عند الغرب بعنوان (De Trianglis).

4) أعمال أبي الريحان البيروني: هو أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني (973م – 1043م). لمع البيروني بين علماء المشرق والمغرب حتى أعتبر البيروني من الذين وضعوا الأسس الأولى لعلم حساب المثلثات .وقد كان في الوقت نفسه جغرافياً، ومؤرخا، وأحد علماء الفيزياء والرياضيات.

يعتبر "القانون المسعودي" في علم الفلك من أهم الكتب التي ألفها البيروني، وقد أهداه إلى السلطان مسعود الغزنوي، وهو من أواخر مؤلفاته (كان عمره يناهز 60 عاما). يحتوي هذا المؤلف على 11 مقالة، المقالة الثالثة مكرسة لعلم المثلثات المسطحة والكروية، وفيها 10 فصول، ناقش فيها كثيرا من المسائل المتعلقة بحساب المثلثات والإنشاءات الهندسية.

وللبيروني مؤلفات غزيرة قاربت 300 مؤلف منها: "كتاب حساب المثلثات"، "جداول رياضية للجيب والظل"، "مقاليد علم الهيئة" (مؤلف في علم الفلك).

5) العدد π: استعمل العرب العلاقة التي تقول إن النسبة بين المحيط والقطر هي ثابتة، وقد ذكر الخوارزمي نسبتين: إحداهما هي $3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ والأخرى: $\frac{62832}{20000}$ (نسبها لأصحاب الفلك).

ونجد عند الكاشي النسبة $\frac{355}{113}$. كما نجد في كتابه الرسالة المحيطية تحديدا للعدد π بطريقة تختلف عن طريقة أرخميدس، حيث يكون π حدا للمتتالية:

$$3\times 2^{n}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{2}+1}}$$

سادسا: عصر النهضة وما بعده:

* في سنة 1533م أسس الرياضي الألماني ريجيومونتانوس علم حساب المثلثات كفرع مستقل عن علم الفلك.

ويعتبر الرياضي الفرنسي فرونسوا فيات (Viète) (1540 م □ 1603 م) أول من قدم علم حساب المثلثات في صيغته النهائية.

* في سنة 1768 م كتب لامبير مقالا أثبت فيه أنه إذا كان عددا ناطقا غير معدوم فإن tan x ليس عددا ناطقا.

كما تمكن لامبير أيضا من إثبات أن العدد π هو عدد متسام، بمعنى أنه لا يمكن إيجاد معادلة معاملاتها ناطقة بحيث يكون π أحد حلولها.

* قام الهولندي" فلنتينو " (Valentino) في القرن 16م بطرح ثنائية أرخميدس للعدد π (120,377) من ثنائية بطليموس لنفس العدد π (7,22) والتي كانت من الشكل: $\frac{377-22}{120-7}=\frac{355}{113}$.

* **جداء واليس (1665):**

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\frac{8\times 8}{7\times 9}\times\ldots$$

* **سلسلة كريكوري (1671):**

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(2n+1)$$

❋ علاقة ماشين (1706):

$\frac{\pi}{4}=\arctan(\frac{1}{5})-\arctan(\frac{1}{239})$ معتمدا أيضا على النشر المحدود للتابع arctan: $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

وقد قام زونغ جيونغ (1848م-1877م) بحساب π و $\frac{1}{\pi}$ بـ 100 عدد بعد الفاصلة باستعمال هذه الطريقة.

❋ قام سلنغرنكسي بحساب الدائرة اعتمادا على نتائج أرخميدس وكذلك قام بحساب π بـ 20 رقم بعد الفاصلة.

❋ علاقة رامانوجان (1914):

$$\pi\frac{\sqrt{8}}{9,801}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n!)[1,103+26,390n]x^{2n+1}}{(n!)^4 396^{4n}}$$

❋ في عام 1921م قام شولي جانغيون بحساب العدد π باستعمال طريقة المضلعات المنتظمة.

❋ وقد تمكن بورين وبوروين (1987) من حساب قيمة تقريبية للعد π حتى 100 مليون رتبة عشرية.

نبذة عن تاريخ الإحصاء والاحتمالات

أولا: نبذة عن تاريخ الإحصاء الوصفي:

* يعود نشاط جمع المعطيات التي تمكننا من معرفة حالة الدول إلى ماض بعيد جدا، فقد كان الإمبراطور ياو (Yao) نظم معطيات إحصائية في مجال الزراعة سنة 2238ق.م. كما أنه عرف عند المصريين منذ 1700ق.م، حيث كان فرعون أماز يس يهدد كل من يرفض الإعلان باسمه ومهنته أو حالته الاجتماعية بالإعدام.

* وقد عرفت الجداول العددية منذ القديم. ولعل أهم هذه الجداول تلك المتعلقة بعلم الفلك وتسمى بالزيج، والتي ورثها العرب عن الرياضيين القدامى كاليونانيين والهنود واستخدموها وطوروها فكانت لهم جداول خاصة تجلت فيها عبقريتهم في علم الفلك.

* يعتبر الفيلسوف الكندي (805 م – 873 م) من الأوائل الذين اهتموا بتحليل المعطيات الإحصائية وذلك خلال بحثه لفك الرسائل المشفرة التي تعتمد على تواترات ظهور الحروف في الرسائل المكتوبة باللغات السرية.

* وفي عصر إمبراطورية الأنكاس في البيرو (القرن 15م) استعملت حزم من الحبال للاحتفاظ بأرقام ومعلومات يمكن قراءتها وتفسيرها عند الحاجة، من قبل مختصين. ولكن تحليلها كان يتم بطريقة معقدة يندر حاليا من يعرفها.

* أما عن الإحصاء الوصفي كعلم قائم فإن منشأه يرجع إلى المدرسة الألمانية. فكلمة إحصاء (Statistik باللاتينية) استعملت من طرف أشنوال (Achenwall) سنة 1746 م.

وفي سنة 1760 م تم تطوير التمثيلات البيانية من طرف الرياضي الناطق بالألمانية جون هنري لامبير.

وأول استخدام معروف للمخططات بالأعمدة فكان سنة 1786 م من طرف ويليام بلايفير (William Playfair) خلال عرضه لبحث في التجارة. كما استخدم أيضا المخطط بالقطاعات سنة 1801 م.

* خلال الفترة ما بين القرنين 19م و 20م، بقي الإحصاء على المستوى الوصفي فقط،وفي بداية القرن 20م انتشرت الفكرة التي تقول بأن الإحصاء مرجع للديموغرافيا.

* ظهرت أول الإحصائيات الإنجليزية سنة 1900م بعد أن اتضحت الطرق الإحصائية التي تمكننا من استخلاص نتائج تخص قوانين احتمال الظواهر انطلاقا من المعطيات. إنه الإحصاء الرياضي الذي انتشر خلال الفترة الممتدة من 1900م إلى 1950م.

* ظهر في الخمسينيات تمثيل خاص لمفهوم الإحصاء، وهو التمثيل الموضوعي، لكنه لا يمكنه أن يعتمد فقط على المعلومات التي تقدمها الملاحظات،و لكن يلزم عليه كذلك أن يأخذ بعين الاعتبار نماذج الاحتمالات. و في خلال نفس الفترة ظهر الحاسب الذي أدى إلى ظهور طرق تحليلية تمكننا من وصف ، تصنيف و تبسيط المعطيات. و في الأخير، بإمكان النتائج التي نصل إليها اقتراح قوانين، نماذج أو شروحا للظواهر، لكن لا يمكن الحكم عن الثقة في هذه القوانين أو النماذج.

* انتشر حساب الاحتمالات بالتوازي مع الإحصاء على يد الرياضيين:باسكال و فيرما في القرن 17م، ولابلاس في القرن 19م، دون إقامة علاقة حقيقية مع الإحصاء.

ثانيا: التحليل التوفيقي عند العرب:

شكل التحليل التوفيقي في بدايته جزءا من الدراسات الأولى حول الموسيقى والكيمياء وعلم الفلك والعروض.

كما نجد له تطبيقا في الميادين الرياضية في أعمال ثابت بن قرة (كتاب "شكل القطاع")، وأبي كامل (كتاب "الطرائف في الحساب") والبيروني (كتاب "مقاليد علم الهيئة").

أما أهم مؤلف في هذا المجال فهو كتاب "فقه الحساب" لابن منعم، وهو من أقدم الكتب الرياضية التي عالجت التحليل التوفيقي، وابن منعم رياضي أندلسي عاش بمراكش في فترة الموحدين، وله ذكر في كتابات ابن البنا وابن هيدور وابن زكريا الغرناطي.

تمت معالجة التحليل التوفيقي في القسم الحادي عشر من الفصل الأول من كتاب "فقه الحساب"، والمعنون بـ "حصر الكلمات التي لا يتكلم البشر إلا بإحداهن"، وقد تم فيه طرح المسائل وربط بعضها ببعض في إطار رياضي تجاوز البحث اللساني.

وقد انتهى ابن منعم في بحثه هذا ببناء لوحة عددية مثلثية، وفق طريقة استقرائية يطابق عناصرها مع التوفيقات المطلوبة. وبهذا يعطي حسب معلوماتنا – لأول مرة – وفق طريقة التوفيقات وحدها المثلث العددي المشهور (المنسوب لباسكال)، الذي تسنى لعلماء الجبر تأسيسه بمركز الشرق، كما هو الحال عند الكرخي والسموأل، ولكن كان ذلك لهدف آخر وبطريقة أخرى.

ثالثا: الاحتمال في عصر النهضة وما بعده:

* بدأت الأبحاث الولية في نظرية الاحتمالات في سنة 1494م، حين نشر الرياضي الإيطالي باسيولي (Pacioli) (1445م - 1514م) عمله الذي ناقش فيه ألعاب الحظ.

قدم الإيطالي كاردانو (Cardano) (1501م – 1576م) في عمله المنشور عام 1663م جملة من القواعد المساعدة في حل مشكلات ألعاب الحظ، وتبعه في ذلك الإيطالي الآخر تارتاجيليا (Tartaglia) (1500م – 1557م).

وقد كان للفيزيائي والفلكي غاليليو غاليلي (1564م – 1642م) سنة 1606م إسهام في حل مشاكل ألعاب الحظ والقمار، كان ضمنه في رسالة له إلى صديق مقامر استشاره في ثلاث مشاكل حول ألعاب الحظ.

* ظلت هذه الإسهامات محدودة وهامشية، حتى النصف الثاني من القرن 17م، حين قام الرياضي الفرنسي بليز باسكال (Pascal) (1623م – 1662م) بتبادل رسائل مع مواطنه بيار دو فيرما (Fermat) حول مسائل متعلقة بالحساب الاحتمالي، فاكتشف طريقتين من طرق الحساب الاحتمالي، واكتشف فيرما الطريقة الثالثة، وخلال هذه الأبحاث ظهر اكتشاف باسكال للمثلث العددي المنسوب إليه (تقدم أن ابن منعم اكتشفه قبل ذلك)، وقد نشرت الرسائل المتبادلة بين فيما وباسكال سنة 1679م ، ثم أعيد نشرها سنة 1819م ضمن مؤلفاته.

* وفي سنة 1666م اكتشف نيوتن (Newoton) (1642م – 1727م) نظام العد الخاص به، ولكنه تأخر في نشره حتى العام 1678م.

* وأهم عمل في هذا المجال كان كتاب جيمس برنولي (1654م – 1705م)، وهو كتابه "فن التخمين" الذي نشره ابن أخيه سنة 1713م، وهو كتاب يقع في 4 أجزاء، وقد حظي بأهمية كبرى في مجال تطوير نظرية

الاحتمالات. وقد أدى اكتشافه لقانون التوزيع في الأعداد الكبيرة (المسمى باسمه) لحل مسائل كانت مستعصية في علم الاحتمالات

* وفي سنة 1763م نشر كتاب الرياضي الإنجليزي توماس بايز (1702م – 1761م)، والذي يعد من رواد نظرية الاحتمالات، حتى صارت له مبرهنة خاصة في الاحتمال عرفت باسم مبرهنة بايز.

* كان للرياضي كارل فريديريك غوص دور بارز في تحديد أساسيات توزيع الاحتمال، ولا يزال المنحنى الناقوسي الممثل للتوزيع الطبيعي يحمل اسمه.

ثم كان للرياضي الفرنسي سيمون دنيس بواسون (Poisson) (1781م – 1840م) دور في توضيح هذه النظرية، كما له توزيع يحمل اسمه.

* وضع المنطقي الإنكليزي جون فين (1834م – 1920م) عام 1866م شرحا مطولا لأعمال لابلاس في كتابه "منطق الصدف"، وتوصل إلى وضع مخطط للاحتمالات الممكنة، صار يعرف بمخطط فين.

وفي هذه الفترة برز الرياضي الروسي أندريه ماركوف (1856م – 1922م) الذي تخصص في الاحتمال، وتوصل إلى ما يسمى بسلاسل ماركوف.

رابعا: الفترة المعاصرة:

* في بداية القرن العشرين بدأ البحث في نظرية الاحتمال يأخذ – إلى جانب بعده الرياضي بعدا منطقيا، فقد تعرض الرياضي الفرنسي هنري بوانكاريه (Poincaré) (1854م – 1912م) سنة 1908 إلى فلسفة المصادفة في كتاب "العلم والمنهج". ثم ظهرت أعمال برتراند رسل في "أسس الرياضيات"، و "مشكلات الفلسفة"، تعرض في الأخير لمشكلة الاستقراء في الرياضيات، وذلك سنة 1912م.

* ثم ظهرت أعمال كل من: فيشر (1890م – 1962م)، مايسنز (1883م – 1953م)، رايشنباخ (1891م – 1953م)، والتي طرحت مفاهيم جديدة جديدة للاحتمال تتفق مع مدلوله الإحصائي لا الاستقرائي.

* وكان للرياضي السوفياتي أندريه كولموغروف (1903م – 1987م) دور بارز في تحديد أنظمة العد التي تعتمد عليها نظرية الاحتمال، إضافة إلى تحديده شروطا يجب أن يحققها الاحتمال، فتحدث عن الفضاء العيني والأحداث. أصدر كولوموغروف أعماله سنة 1933م، واعتبر بفضلها إقليدس القرن العشرين.

* وفي منتصف القرن العشرين نشرت العديد من الأعمال حول المنطق الاستقرائي، منها: أعمال كارناب (1891م □ 1970م)، وهوزياسون، ووايزمان، وبرتراند رسل، وغيرهم.

نبذة عن تاريخ التحليل

إن التحليل الرياضي يتناول بصفة رئيسة الدوال ذات متغيرات في فضاء قابل للقياس (مجموعات الأعداد، الفضاءات المترية ...)، وما يتعلق بذلك من معادلات تفاضلية وتكاملية، وطرق عددية. لقد تفرعت الرياضيات مؤخرا تفرعا رهيبا صعب معه الإحاطة بجميع أقسامها.

يرجع استعمال مفهوم الدالة إلى الرياضي شرف الدين الطوسي (1135م – 1213م)، ولكنه لم ينص على تعريف واضح لمفهوم الدالة.

صيغ التعريف العام لدالة عددية من طرف أولر (Euler) سنة 1751م، ولكن كانت صياغته غير دقيقة.

أما التعريف العام لمفهوم دالة عددية فقد صيغ من طرف لوباتشيفسكي (Lobatchevski) سنة 1834م، وديريكليت (Dirichlet) سنة 1837م، بعد عمل طويل قام به رياضيو القرن 18م.

أولا: الحساب التفاضلي:

1) أعمال شرف الدين الطوسي:

لقد أدت أبحاث الرياضي شرف الدين الطوسي (1135م – 1213م) حول المعادلات من الدرجة الثالثة إلى ظهور أول بوادر الحساب التفاضلي، والمتمثل في مفهوم الاشتقاق والقيم القصوى.

فمثلا لدراسة المعادلة $ax^2 = x^3 + c$ يقوم الطوسي بتحويلها إلى الشكل $c = x^2(a - x)$.

نفرض بتعبيرنا الحالي أن $c = x^2(a - x)$.

يقوم الطوسي بمناقشة ثلاث حالات:

الحالة $c > \frac{4a^3}{27}$: يقرر فيها أن المعادلة مستحيلة الحل (لها حل سالب).

الحالة $c = \frac{4a^3}{27}$: يستخرج فيها الحل المضاعف (غير أنه لا يعترف بالحل السالب).

الحالة $c < \frac{4a^3}{27}$: يستخرج لها حلين موجبين x_1، x_2 يحققان: $0 < x_1 < \frac{2a}{3} < x_2 < a$.

يبرهن الطوسي بعد ذلك أن $f(x_0)$ حيث $x_0 = \frac{2a}{3}$ هو القيمة القصوى للدالة f (يسميه الطوسي بالعدد الأعظم) وذلك بإثبات القضيتين التاليتين:

$$x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) \qquad x_2 < x_0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_0)$$

والجدير بالذكر أنه لكي يجد الطوسي القيمة $x_0 = \frac{2a}{3}$ يقوم بحل المعادلة $f'(x) = 0$. ويقوم بعد ذلك بحساب القيمة $f(x_0) = \frac{4a^3}{27}$، وهو ما مكنه من تحديد الحالات السابقة.

ولإيجاد الحلين الموجبين يقوم الطوسي بإجراء التحويل التآلفي $x_2 = x_0 + x$ ليعود إلى المعادلة $x^3 + ax^2 = k$، والتي سبق له وأن حلها. ثم يقوم بإجراء التحويل التآلفي $x_1 = x + a - x_2$، والذي يؤدي به إلى معادلة أخرى سبق له وأن حلها. ثم يتأكد أن $x_1 \neq x_0$ و $x_2 \neq x_0$. أما الجذر السالب فلا يتعرض له الطوسي.

إن وجود العدد المشتق لم يكن دراسة عرضية طارئة، بل إن العكس هو الصحيح، فوجوده كان مقصودا للحصول على القيم القصوى، وهي الطريقة المتبعة حاليا حتى في الحساب التفاضلي متعدد الأبعاد بل والمجرد (وهو ما نسميه بالبحث عن القيم الحرجة).

2) أعمال نيوتن وليبنيتز وغيرهما:

* في القرن 12م قام الرياضي الهندي باسكارا بإعطاء عما يمكن أن ندعوه الآن "معامل تفاضلي" وكانت الفكرة الأساسية وراء ما ندعوه حاليا مبرهنة رول.

* ظهرت بوادر الحساب التفاضلي في القرن 17م، وقد اعتبر في البداية من الزاوية الهندسية والحركية في حالات خاصة، وذلك من طرف فيرما (Fermat) وتوريشيللي (Torricelli) وبارو (Barrow).

قام في فيرما بدراسة القيم القصوى العليا والدنيا لكثير حدود معتمدا على ما يسمى حاليا بانشر المحدود في جوار نقطة. تناول فيرما المثال التالي: $f(x) = bx - x^2$. في جوار نقطة a لدينا:

$f(a + h) = ba - a^2 (b - 2a)h - h^2$.

وبعد إجراء التقريبات المناسبة يحصل على القيمة القصوى التي تحقق: $2x_0 = b$.

قام فيرما أيضا برسم مماسات المنحنيات وفق منهجية مبتكرة استفاد منها ليبنيتز ونيوتن في أعمالهما ضمن هذا المجال. وقد اعترف نيوتن بفضل فيرما.

* ظهر المشتق بمفهومه الحالي أول ما ظهر في أعمال الرياضيين نيوتن (Newoton) (1642م – 1727م) وليبنيتز (Libenitz) (1646م – 1716م) ضمن أبحاثهما حول المسائل الهندسية والميكانيكية والفيزيائية. سمى نيوتن المشتق بالمد والتابع الأصلي بالجاري. أما الرمز d الذي يرمز للتفاضل، والرمز $\frac{dy}{dx}$ الذي يرمز للاشتقاق فهو من استعمل ليبنيتز.

* ظهرت المشتقات من الرتب العليا مع ظهور كل جهاز الحساب التفاضلي، وقد طبقت من طرف نيوتن وليبنيتز على المسائل الميكانيكية والهندسية، مثل التسارع.

* ورد نص نظرية رول سنة 1690م من طرف رول وذلك في حالة كثيرات الحدود في شكل ضمني، كما نصت نظرية لاغرانج (Lagrange) (الشكل الأول من نظرية التزايدات المنتهية) من طرفه سنة 1798م، ولم ترد النصوص الحديثة لهاتين النظريتين إلا في كتاب كوشي "دروس في التحليل الرياضي للمدرسة متعدد التقنيات" سنة 1821م.

3) أعمال برنولي، بولزانو، فايشتراس:

* كتب أول مؤلف في الحساب التفاضلي من طرف طرف جوهان برنولي سنة 1691م و 1692م، وكان مخصصا لمركيز يدعى غيوم فرونسوا دي لوبيتال (L'hospital)، وهو الذي قام بنشر الكتاب سنة 1696م مما جعل اسمه يدخل تاريخ العلوم، وكان من الأصوب أن تسمى قاعدتا لوبيتال باسم قاعدتي برنولي.

* أشار بولزانو سنة 1830م إلى أمثلة لدوال مستمرة لا تقبل مشتقات، ولم ينشر مؤلفه إلا سنة 1930م.

* كما أشار فايشتراس سنة 1860م في كتابه المنشور سنة 1872 إلى هذه الدوال، وقد كانت دروسه في جامعة برلين تمثل مرحلة تلي عمل كوشي.

4) أعمال أخرى:

* حصل هنري بوانكاريه (Poincaré) سنة 1889م على تعميم لنظرية ستوكس (Stokes) وذلك في الجزء الثالث من كتابه "طرق جديدة للميكانيكا السماوية".

* يعتبر إيلي كارتان (Cartan) هو منشئ الحساب التفاضلي الخارجي، بابتكاره لحساب الأشكال التفاضلية ضد التناظرية. ويعود القسم الجبري من هذه الأشكال إلى عمل غراسمان (Grassmann) سنة 1844م، الذي ظهر فيه لأول مرة الفضاء ذو البعد n.

* أصبح تعميم نظرية الدوال إلى الفضاءات النظيمية منذ أن قدم فريشي (Frechet) سنة 1911م تعريفه للتفاضلية.

* أدخل لورنت شوارتز (Schwartz) (1915م – 2002م) في الأربعينات من القرن 20م (باضبط في سنة 1944م) مفهوما جديدا في الاشتقاق، إنه مفهوم التوزيعات (الدوال المعممة). ن هذا المفهوم يمكن الدوال غير المستمرة من التمتع بقابلية الاشتقاق. ولقد تحصل شوارتز سنة 1950م على ميدالية فيلدز (Fieldz) (1863م – 1932م). نشر شوارتز خلال سنتي 1950م و 1951م مؤلفه الشهير "نظرية التوزيعات"، استعرض فيه زبدة أفكاره حول هذا المفهوم الجديد. وتجدر الإشارة أن شوارتز عمل على أن تناقش أطروحة موريس أودان (Audin) غيابيا بباريس، إثر اغتياله تعبيرا عن استنكار الجامعيين للتعذيب الذي كلن يمارسه الاستعمار الفرنسي في الجزائر، وقد تم ذلك يوم 02 ديسمبر عام 1957م.

ثانيا: الحساب التكاملي:

أثار حساب المساحات والأحجام المنحنية اهتمام الرياضيين العرب، فلقد أبصر هذا القطاع النور في القرن 9م، حيث بدأ مع ترجمة النصوص الإغريقية المتعلقة بما دعي لاحقا بطريقة "إفناء الفرق".

وقبل التطرق لهذا الموضوع نشير إلى أصوله في النصوص اليونانية التي ترجمها علماء العرب وأقاموا بحوثا حولها.

1) أعمال إقليدس وعلماء اليونان:

في المقالة العاشرة من كتاب "الأصول" لإقليدس وجدت القضية التالية: "إذا أخذنا مقدارين متفاوتين، وإذا طرحنا من المقدار الأكبر جزءا أكبر من نصفه، وإذا طرحنا من الباقي جزءا أكبر من نصفه، وإذا تابعنا هذه العملية نفسها تكرارا، فسيبقى مقدار ما يكون أصغر من المقدار الأصغر المعطى أساسا". يمكن التعبير عن هذه

القضية بالرموز المعاصرة: إذا أخذنا مقدارين موجبين تماما a، b ومتتالية موجبة $(b_n)_{n\geq 1}$ حيث $b_n > \frac{1}{2}\left(b - \sum_{k=1}^{n-1} b_k\right)$. فإنه يوجد n_0 بحيث أنه من أجل كل $n > n_0$ فإن $\left(b - \sum_{k=1}^{n-1} b_k\right) < a$.

كما أن أرخميدس أدخل في كتابه "الكرة والمخروط" فكرة المجاميع التكاملية السفلى والعليا، وقد تقدم ذكر هذه الطريقة عند الكلام عن العدد π.

2) أعمال الرياضيين العرب:

* إن أول مؤلف عربي حول موضوع المساحات عن طريق الإفناء هو كتاب "قياس الأشكال المسطحة والكروية" للإخوة بني موسى بن شاكر (محمد وأحمد والحسين)، وقد قسمت هذه الرسالة إلى ثلاثة أجزاء: الجزء الأول يتعلق بقياس الدائرة، والجزء الثاني يتعلق بحجم الكرة، وأما الجزء الأخير فيتناول المتوسطين المتناسبين وتثليث الزاوية.

برهن بنو موسى القضية التالية: "لنأخذ قطعة من مستقيم ودائرة. فإذا كان طول القطعة أصغر من محيط الدائرة، يمكننا عندئذ رسم مضلع محاط بهذه الدائرة، ويكون مجموع أضلاعه أكبر من طول القطعة المعطاة. وإذا تجوز طول القطعة محيط الدائرة، إذ ذاك يمكن إحاطة الدائرة بمضلع يكون مجموع أضلاعه أصغر من طول القطعة المعطاة". وبرهنوا أن مساحة الدائرة تعادب جداء نصف طول القطر في المحيط.

وفي هذا السياق قدم بنو موسى شرحا لطريقة أرخميدس في إيجاد العدد π، واستخلصوا تعميما لهذه الطريقة.

وبطريقة مماثلة أوجدوا المساجة الجانبية لسطح الكرة، وبينوا أنها تعادل أربعة أضعاف مساحة الدائرة الكبرى، ثم حددوا حجم الكرة على أنه "ضرب نصف قطرها بثلث مساحتها الجانبية".

* وقد كان لثابت بن قرة (834 م – 961 م) إسهام كثيف في هذا المجال، حيث كتب ثلاث مقالات تتناول: مساحة القطع المكافئ، حجم المجسم المكافئ الدوراني، قطوع الأسطوتنة ومساحتها الجانبية.

استعمل ثابت بن قرة في المقالة الأولى طريقة تشبه طريقة أرخميدس في تحديد مساحة المضلعات المحيطة والمحاطة بدائرة، ولكنه طبق هذا المفهوم على القطع المكافئ (يشبه ما يسمى مجاميع داربو السفلية والعلوية).

واستعمل في المقالة الثانية الطريقة نفسها في تحديد حجم المجسم المكافئ الدوراني، استخدم فيها جذوع مخروطات متجاورة، تحدد قاعداتها تقسيما لقطر القطع المكافئ الذي يولد المجسم المكافئ الدوراني.

أما المقالة الثالثة فقد درس فيها أنواع القطوع المستوية لأسطوانة قائمة أو مائلة، وحدد لاحقا مساحة الإهليلج، ومساحة القطاعات الإهليلجية ...

وهكذا نجد أن أعمال ثابت بن قرة تعد إسهاما أوليا في مجال الحساب التكاملي، وقد تابع خلفاؤه البحوث في هذا المجال، كأعمال حفيده إبراهيم بن سنان، وأعمال الماهاني.

كما نجد أن أيضا الرياضي ابن الهيثم استعاد برهان حجم المجسم المكافئ الدوراني، وكذلك البرهان المتعلق بالحجم الذي يولده دوران القطع المكافئ حول محور التراتيب (حسب اصطلاح الهندسة التحليلية). كما استعمل هذه الطريقة في إيجاد حجم الكرة أيضا. ويتكافأ عمل ابن الهيثم مع ما سمي لاحقا بتكامل كوشي – ريمان.

3) عصر النهضة وما بعده:

* استعمل ليبنيتز الرمز $\int$ للدلالة على التكامل، كما أنه حدد قواعد حساب قواعد التكاملات غير المحددة.

* ظهرت التكاملات المنحنية لأول مرة عند كليرو (Clairaut) سنة 1743م.

* ظهر التكامل المضاعف على ساحة مستوية محدودة لأول مرة عند ليونارد أولر (Euler) (1707م □ 1783م)، الذي قاعدة حسابه إلى تكامل مكرر مرتين، كما قدم لاغرانج التكامل الثلاثي بالطريقة نفسها (مكرر ثلاث مرات). وقد قدم كلاهما بعض القواعد العامة لتحويل المتغيرات، لكنها لم تكن كاملة. وقد قدمت الطريقة السليمة من طرف الرياضي أستروغرادسكي (Ostrogradski) سنة 1836م بخصوص التكاملات المزدوجة والثلاثية.

ثم قام الرياضي جاكوبي سنة 1841م بتعميم هذا العمل، وأدخل المحددات المسماة باسمه.

4) أعمال كوشي، داربو، ريمان ....:

* قدم الرياضي الفرنسي أوغسطين لويس كوشي (Cauchy) (1789م □ 1857م) سنة 1821م التعريف السليم للتكامل بصفته نهاية مجاميع تكاملية، وأصبح بعد ذلك طرح مسألة وجود تكامل دوال تنتمي لهذا الصنف أو ذاك من الأمور الممكنة في النهاية. اقترح كوشي برهانا على وجود تكامل للدوال المستمرة، لكن تبين لعد هذا أن هذا البرهان غير سليم نظرا لفقدان مفهوم الاستمرار المنتظم.

* إن أول برهان سليم لوجود تكامل للدوال المستمرة كان من وضع داربو سنة 1875م

* أما بخصوص الشروط اللازمة والكافية لقابلية دالة للمكاملة (غير مستمرة بالضرورة) فقد قدم من طرف كل من: ريمان، دير بوا ريمون، لوبيغ (Lebesgue) (1875م – 1941م) في النصف الثاني من القرن 19م.

* لقد كان كوشي أول من اعتبر التكامل المنحني بالنسبة للمتغير المركب، وقد رد تعريفه إلى التعريف المعتاد بالنسبة لمتغير حقيقي، وذلك بفصل الجزءين الحقيقي والتخيلي، وقد أشار إلى طريقة حساب تكاملات تحليلية على طول حافات مغلقة بواسطة الرواسب.

* تم حساب العديد من التكاملات الموسعة خلال القرنين 17م و 18م، وقد أدخلت دراسة الدالتين بيتا (β) وغاما (Γ) في سنة 1730م، وذلك قبل أن يقدم كوشي تعريفا سليما لتقارب تكامل موسع سنة 1821م.

وقد أبرز دريكليت سنة 1854 التكاملات المتقاربة مطلقا، كما أبرز فالي بوسان (Poussin) سنة 1892م التكاملات المتقاربة بانتظام.

5) أعمال ستيلجاس، لوبيغ، ماركوف ...:

* أدخل ستيلجاس (Stieltjes) (1856م – 1894م) سنة 1894م مفهوما جديدا للتكامل يختلف عن المفهوم القديم يختلف عن المفهوم القديم، حيث أن المجالات المختلفة على المستقيم العددي يملكان قياسين مختلفين ($\int f(x)dg(x)$)، وخلاف هذا فإن طرح تكامل ستيلجاس يشبه تكامل ريمان. وقد قدم هذا المفهوم تطبيقا واسعا خلال القرن 20م (استعمله ريس مثلا في إحدى نظرياته).

* نص لوبيغ سنة 1902م على مفهوم جديد للتكامل أعم من المفاهيم السابقة، وقد لعب هذا المفهوم دورا خاصا في الرياضيات الحديثة، حيث ان مجموعة الدوال القابلة للمكاملة يمكن اعتبارها كفضاء نظيمي تام (فضاءات L^1).

* وفي الفترة مابين 1938م و 1943م تمت دراسة القياسات الجمعية (من وجهة نظر أكثر عمومية)، وذلك من طرف ماركوف (Markov) وألكسندروف (Alexendrov)

ثالثا: الحساب اللامتناهي:

* أول من عرف باستخدام مفاهيم النهايات والتقارب كان عدد من رياضيي اليونان أمثال: اودوكسوس وأرخميدس الذين قاما باستخدام هذه المفاهيم بشكل غير تقليدي عندما استخدما طريقة الإفناء لحساب مساحة وحجم المساحات والأجسام.

* في القرن 14م قام الرياضي الهندي مادهافا بالتعبير عن عدة دوال مثلية كسلاسل غير متناهية، قدر مقدار الخطأ في التقديرات التي تعطيها هذه السلاسل.

وفي هذه الفترة أيضا (منتصف القرن 14م) ظهرت أعمال أوراسم (Oresme) (1323م □ 1382م) حول السلسلة الهندسية ذات الحد العام q^n، حيث أثبت أن الشرط اللازم والكافي لتقارب هذه السلسة هو أن يكون $0<q<1$، وفي هذه الحالة يكون مجموع هذه السلسلة هو $\frac{1}{1-q}$. كما قدم برهانا لتباعد السلسلة التوافقية معتمدا على ما سمي لاحقا بمعيار كوشي. وقد تم برهان تباعد السلسلة التوافقية أيضا من طرف الرياضي الإيطالي مانغولي (Mongoli) سنة 1660م.

* درست السلاسل الخاصة بالدوال الأولية من طرف نيوتن وجيمس غريغوري (Gregory) ابتداء من سنة 1660م. وفي القرن الموالي درسها أولر في الساحة المركبة.

* يرجع عمل تايلور الذي برزت فيه سلسلة تايلور إلى سنة 1715م، مع ملاحظة أن عملا مشابها قد أنجز من طرف نيوتن وليبنيتز (حيث أن نيوتن كان يعتقد أنه بالإمكان تمثيل أي دالة عبر سلسلة قوى).

* كان رياضيو القرن 18م يؤكدون أن كل دالة تقبل النشر وفق سلسلة تايلور، وكان كوشي سنة 1823م أول من وضع الشروط السليمة لتقارب سلسلة تايلور نحو دالة، كما كان أول من ميز بوضوح بين تقارب هذه السلسة، وبين تقاربها نحو الدالة المعطاة.

* قدم أول تعريف سليم لنهاية متتالية عددية من طرف بولزانو (Bolzano) سنة 1817م، ثم تلاه كوشي سنة 1821م في كتابه "دروس في التحليل للمدرسة متعددة التقنيات"، وبصفة خاصة فإن بولزانو هو أول من صاغ مقياس كوشي بألفاظ واضحة، بل حاول البرهان عليه ولم ينجح.

* قدم كوشي أيضا أول تعريف سليم لنهاية دالة عددية، كما وضع النظريات الأساسية حول وجود نهايات مختلفة، وأدخل مفهوم النهاية العليا والنهاية السفلى.

* يرجع مفهوم التقارب المنتظم لمتتالية دوال ودورها في الاحتفاظ بالاستمرار إلى ستوكس (Stokes)، وسايدل (Seidel) سنتي 1847م و1848م، ثم كوشي سنة 1853م. وكان آبل (Abel) قد قدم قبل ذلك نظرية مماثلة في حالة خاصة سنة 1826م.

* اكتشف كوشي العلاقة الموجودة بين قابلية الاشتقاق بالنسبة للمتغير المركب لدالة، وكون هذه الدالة تحليلية، وسمى أولى هاتين الخاصيتين "وحداوية الجنس".

* وقد اقترح شاتونوفسكي (Chatounovski) سنة 1923م مفهوم أعم للنهاية، وهو مفهوم التقارب وفق مرشحة الذي يعد التقارب وفق اتجاه حالة خاصة منه.

* اهتم كل من الرياضيين: الروسي سوخوتسكي (Sokhotski)، والإيطالي كازوراتي (Kasorati) بتحليل النقاط الشاذة لدالة وحية التعيين بواسطة سلسلة لورانت. كما اهتم بذلك فايشتراس من بعدهما.

رابعا: الطبولوجيا:

* استعملت في الرياضيات مفاهيم الاستمرار والنهاية دون تعريفها بدقة، إلى أن قدم بولزانو سنة 1917، ثم كوشي سنة 1921 أول تعريف سليم لاستمرار دالة عددية لمتغير حقيقي. كما يرجع تعريف الاستمرار المنتظم والنظرية الموافقة له، والمتعلقة بدالة مستمرة في مجال مغلق إلى هاين (Heine) سنة 1870م.

* ويرجع استعمال أحد المفاهيم الطبولوجية (وهو مفهوم نقطة التراكم على المستقيم العددي أو الفضاء ذي البعد n) إلى الرياضي كانتور (Cantor) حلال السبعينات من القرن 19م.

* قام هنري بوانكاريه (Poincaré) (1854م □ 1912م) سنة 1895م بوضع أسس الطبولوجيا الجبرية بنشر "Analysis Situs".

* برهن بوريل (Borel) سنة 1895م على النظرية المتعلقة باستخراج تغطية منتهية (والمتعلقة بمفهوم التراص) في حالة خاصة، وبرهن عليها لوبيغ (Lebesgue) في الحالة العامة سنة 1902م.

* حاول هيلبرت (Hilbert) أن يجعل مفاهيم النهاية والاستمرار بديهيات، فاستعمل المصطلح المعروف بالجوار.

* في بداية القرن 20م تمكن كل من ريس (Riez) وفريشي (Frechet) سنة 1906م من استخراج الخصائص المشتركة بين الأشكال الهندسية و مجموعة الدوال، حيث قاما بتحديد المفاهيم المتعلقة بالمسافة و الطبولوجيا. كما أدخل فريشي مفهومي التمام والتراص في فضاء متري.

* كما وضع هوسدورف (Hausdroff) سنة 1914م المسلمات الطبولوجية على شكل يشبه تقريبا شكل المبرهنات المستعملة حاليا.

خامسا: المعادلات التفاضلية:

* بدأت الفترة الأولى في تاريخ المعادلات التفاضلية والتي تضم الربع الأخير من القرن 17م والقرن 18م كله، بأعمال نيوتن (1642م – 1727م) وليبنيتز (1646م – 1716م). وسرعان ما أدت دراسة مشاكل ديناميكا النقطة والجسم، وكذلك بعض المسائل الهندسية بواسطة طرق حسابات التفاضل والتكامل إلى فصل وإبراز أبسط أنواع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبتين الأولى والثانية، وقد صارت المعادلات التفاضلية في النصف الأول للقرن 18م الأداة الأساسية في الأبحاث العلمية، ليس في مجال الميكانيكا فحسب وإنما في الهندسة التفاضلية وحساب التغاير أيضا. وفي نهاية هذه الفترة أخذت مسائل الفيزياء الرياضية، تبحث في صورة معادلات تفاضلية جزئية، وقد صارت هذه المعادلات تطبق على نطاق واسع في النصف الثاني من القرن 18م.

* وقد أخذ تطور المعادلات التفاضلية اتجاها آخر عند ليبنيتز ومتابعيه الأقربين: ياكوف، برنولي (1654م - 1715م) ويوحنا برنوللي (1667م – 1748م). ومما يجدر بالذكر أن ليبنيتز هو أول من استخدم مصطلح (المعادلات التفاضلية).

* ظهرت المعادلات التفاضلية الجزئية عند أولر (Euler) سنة 1734م.

* طرحت المسألة العامة لوجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية في أعمال القرن 19م، وجاء كوشي سنة 1844م بأول برهان لوجود الحل، ثم اختصره ليبشيتز اختصارا كبيرا وصاغ الشرط الذي يحمل اسمه.

* قدم بيكار سنة 1890م طريقة التقريبات المتتالية، وقام باناخ (Banach) سنة 1922م بوضع هذه الطريقة في قالب مجرد من أجل فضاء متري.

سادسا: لمحة عن جماعة بورباكي:

قدم فريق نيكولا بورباكي (Nicolas Bourbaki) خدمة جليلة للرياضيات الحديثة طيلة القرن 20م. لقد انشغل أعضاء هذا الفريق بوضع الرياضيات على أسس متينة ترضي كافة الرياضيين، في وقت كانت الرياضيات تعاني من فجوات وثغرات في بنيانها المنطقي. ونيكولا بورباكي اسم إغريقي استعارته جماعة من الرياضيين الشباب للتستر وراءه، وقد تم انتحال هذا الاسم حوالي سنة 1933م. وقد كان هذا الفريق يتكون من خريجي كلية المعامين العليا الباريسية، وهي كلية عريقة ومعروفة بتكوينها النخبوي. يقول أنريه فاي (Weil) (1906م – 1998م): (إنه من الصعب تحديد ميلاد بورباكي).

يتكون الفريق من قرابة 20 عضوا جلهم فرنسيين، لا يتجاوز أعمارهم 50 سنة، حيث يستقيل كل عضو تجاوز هذ السن، ويتحدد الفريق بتصويت الأعضاء القدماء. أسس فريق بورباكي خمسة من الفرنسيين هم:

- **جان دالزرت (Dalsert) (1903م – 1968م)**: دارت أعماله حول نظرية الأعداد والتوابع الخاصة.
- **هنري كارتان (Cartan) (4190م – ؟)**: ساهم مساهمة أساسية في علم الجبر، وأبوه هو إيلي كارتان.
- **جون ديودوني (Dieudonné) (1906م – 1992م)**: يعتبر أغزر المؤلفين إنتاجا، وتمس أعماله مختلف التخصصات الرياضية.
- **أندريه فاي (Weil) (1906م – 1998م)**: تناولت أعماله نظرية الأعداد والهندسة.
- **كلود شوفالييه (Chevalley) (1909م – 1984م)**: دارت أعماله حول نظرية الأعداد.

ويبدو أن أول اجتماع للفريق كان عام 1935م، حضره 07 أعضاء، من بينهم لأعضاء الفريق المؤسس (عدا دالزرت)، بالإضافة إلى ميرلاس (Mirlès) ومندلبروت (Mandelbrot)، وروني دي بوسال (De Possel)، الذي شغل منصب أستاذ في جامعة الجزائر مدة طويلة.

ظهر أول عمل لبورباكي عام 1939م. وفي عام 1948م نظم بورباكي حلقة سنوية من 18 جلسة تهدف إلى عرض أحدث النتائج في المواضيع الرياضية التي يراها الفريق، وقد تجاوزت حاليا 500 عرضا تم نشرها.

تمثل عمل بورباكي أيضا في إصدار سلسلة من الكتب تحت عنوان "أصول الرياضيات" (Eléments de mathématiques)، وهو يشبه عنوان كتاب إقليدس.

نماذج امتحانات سابقة

الامتحان النهائي في مقياس تاريخ الرياضيات (2011-2012)

التمرين الأول:

1) اكتب باستعمال نظام العد البابلي العددين التاليين: 725، 3662.

2) اكتب باستعمال نظام العد المصري الأعداد التالية: 3024، 10056.

3) ماذا يقابل الحرفان **س** و **ش** في نظام العد العربي (حساب الجمل) ؟

التمرين الثاني: انسب الكتب التالية إلى مؤلفيها:

مفتاح الحساب	السموأل المغربي
المدخل إلى علم العدد	جمشيد غياث الدين الكاشاني
المدخل إلى صناعة الهندسة	ابن قنفذ القسنطيني
الباهر في الجبر	ديوفونطس
حط النقاب عن وجوه أعمال الحساب	قسطا بن لوقا البعلبكي

التمرين الثالث: إليك النص التالي من كتاب الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى الخوارزمي:

فأما الجذور والعدد التي تعدل الأموال فنحو قولك ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالا، فبابه أن تنصف الأجذار فتكون واحدا ونصفا، فاضربها في مثلها فتكون اثنين وربعا، فزدها على الأربعة فتكون ستة وربعا، فخذ جذرها وهو اثنان ونصف، فزده على نصف الأجذار وهو واحد ونصف فتكون أربعة وهو جذر المال، والمال ستة عشر.

اكتب النص باستعمال الرموز المعاصرة (يطلب الدقة مع التوضيح خطوة خطوة).

التمرين الرابع (05 نقاط): أجب عن الأسئلة التالية:

1) تنسب الهندسة التحليلية إلى اثنين من علماء الرياضيات. اذكرهما.

2) أحدثت مسلمة التوازي جدلا كبيرا على مر العصور. إلام انتهى هذا الجدل (باختصار) ؟

3) من هو الرياضي الذي يرجع إليه الفضل في تعريف أوربا بالرياضيات العربية (المغربية خاصة) ؟ وأين درس ؟

4) أحدثت إحدى المخمنات جدلا طويلا دام حوالي ثلاثة قرون ونصف. لمن تنسب هذه المخمنة ؟ ومتى برهنت ؟

5) وضح باختصار كيفية تقسيم كتاب الأصول.

الإجابة النموذجية للامتحان النهائي (2011-2012)

التمرين الأول:

1) ∇∇∇∇∇ ∠∇∇ ≡ 725   ∇∇ ∇ ∇ ≡ 3662

2) ϒϒϒ∩∩|||| ≡ 3024   ⇑ ∩∩∩∩∩|||||| ≡ 10056

3) الحرف س يقابل العدد 60 والحرف ش يقابل العدد 300

التمرين الثاني:

مفتاح الحساب	السموأل المغربي
المدخل إلى علم العدد	جمشيد غياث الدين الكاشاني
المدخل إلى صناعة الهندسة	ابن قنفذ القسنطيني
الباهر في الجبر	ديوفونطس .
حط النقاب عن وجوه أعمال الحساب	قسطا بن لوقا البعلبكي

التمرين الثالث:

فأما الجذور والعدد التي تعدل الأموال: $bx + c = ax^2$

فنحو قولك ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالا: $3x + 4 = x^2$

فبابه أن تنصف الأجذار فتكون واحدا ونصفا: $\frac{b}{2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

فاضربها في مثلها فتكون اثنين وربعا: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$

فزدها على الأربعة فتكون ستة وربعا: $\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 2 + \frac{1}{4} + 4 = 6 + \frac{1}{4}$

فخذ جذرها وهو اثنان ونصف: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{2}$

فزده على نصف الأجذار وهو واحد ونصف، فتكون أربعة وهو جذر المال والمال ستة عشر: $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\Delta} = 4$ ، $x^2 = 16$

التمرين الرابع:

1) تنسب الهندسة التحليلية إلى الرياضيين رينيه ديكارت وبيير دو فيرما

2) انتهى الجدل إلى ظهور الهندستين غير الأقليديتين لريمان ولوباتشيفيسكي

3) هو الرياضي الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي الذي درس في بجاية

4) هي مخمنة فيرما التي برهنت في منتصف سنة 1995

5) المقالات من 01 إلى 16: هندسة مستوية.

المقالات من 07 إلى 10: حساب ونظرية الأعداد.

المقالات من 11 إلى 13: هندسة المجسمات

الامتحان الاستدراكي في مقياس تاريخ الرياضيات (2011-2012)

التمرين الأول:

1) مرت الحضارة العربية بأربعة مراحل هامة. اذكرها باختصار

2) اذكر ثلاثة من أشهر المترجمين العرب.

3) ما اسم الكتاب الذي ألفه المؤتمن بن هود ؟

التمرين الثاني: أكمل الفراغات التالية:

1) ينسب كتاب الأصول إلى مؤلفه ....

2) واضع علم الجبر هو الرياضي ....

3) اشتهر الرياضي ابن البنا بكتابه ....

4) كان البابليون يكتبون نصوصهم على ....

5) تنسب طريقة حل معادلة من الدرجة الثالثة إلى الرياضي ....

التمرين الثالث: إليك النص التالي من كتاب مفتاح الحساب لجمشيد غياث الدين الكاشاني:

مال واحد يعادل ستة أشياء وأربعين عددا . حصلنا مربع نصف عدد الأشياء فكان تسعة . زدناها على العدد وهو أربعون بلغت تسعة وأربعين . أخذنا جذره فكان سبعة . زدناها على نصف عدد الأشياء وهو ثلاثة بلغت عشرة وهو الشيء المجهول.

اكتب النص باستعمال الرموز المعاصرة (يطلب الدقة مع التوضيح خطوة خطوة).

التمرين الرابع: إليك أبياتا من أرجوزة ابن الياسمين:

أولها في الاصطلاح الجاري أن تعدل الأموال للأجذار

وإن تكن عادلت الأعدادا فهي تليها فافهم المرادا

وإن تعادل بالجذور عددا فتلك تتلوها على ماحددا

فاقسم على الأموال إن وجدتها واقسم على الأجذار إن عدمتها

1) على ضوء هذه الأبيات أعط المعادلات الثلاثة الأولى مرتبة ومكتوبة حسب اصطلاح الخوارزمي، وبالرموز المعاصرة.

2) ماذا يقصد المؤلف بالبيت الأخير ؟

الإجابة النموذجية للامتحان الاستدراكي (2011-2012)

التمرين الأول:

1) مرحلة الترجمة ، مرحلة الإبداع والابتكار ، مرحلة نقل مجموعة من الأدوات إلى أوربا ، مرحلة الجمود

2) إسحاق بن حنين ، ثابت بن قرة ، قسطا بن لوقا البعلبكي

3) اسم الكتاب الذي ألفه المؤتمن بن هود هو الاستكمال

التمرين الثاني:

1) ينسب كتاب الأصول إلى مؤلفه أقليدس

2) واضع علم الجبر هو الرياضي محمد بن موسى الخوارزمي

3) اشتهر الرياضي ابن البنا بكتابه تلخيص أعمال الحساب

4) كان البابليون يكتبون نصوصهم على الألواح الطينية

5) تنسب طريقة حل معادلة من الدرجة الثالثة إلى الرياضي الإيطالي كاردانو

التمرين الثالث:

مال واحد يعادل ستة أشياء وأربعين عددا: $x^2 = 6x + 40$

حصلنا مربع نصف عدد الأشياء فكان تسعة: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$

زدناها على العدد وهو أربعون بلغت تسعة وأربعين: $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 9 + 40 = 49$

أخذنا جذره فكان سبعة: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

زدناها على نصف عدد الأشياء وهو ثلاثة بلغت عشرة . وهو الشيء المجهول: $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\Delta} = 7 + 3 = 10$

التمرين الرابع:

1) المعادلات الثلاثة الأولى هي:

* أموال تعدل جذورا: $ax^2 = bx$ * أموال تعدل عددا: $ax^2 = c$ * جذور تعدل عدد: $bx = c$

2) في المعادلة الأولى $x = \frac{b}{a}$ وفي الثانية $x^2 = \frac{c}{a}$ وفي الثالثة $x = \frac{c}{b}$

الامتحان النهائي في مقياس تاريخ الرياضيات (2012-2013)

التمرين الأول:

1) اكتب باستعمال نظام العد الروماني العدد 3214.

2) اكتب باستعمال نظام العد المصري العدد 3452.

3) كيف كان نظام العد عند البابليين ؟

التمرين الثاني: انسب الكتب التالية إلى مؤلفيها:

كتاب الأصول	أرخميدس
الكرة والأسطوانة	بطليموس
كتاب الجبر والمقابلة	البيروني
المجسطي	أقليدس
مقاليد علم الهيئة	الخوارزمي

التمرين الثالث: إليك النص التالي من كتاب صناعة الجبر لديوفونتس (ترجمة قسطا بن لوقا):

نريد أن نجد عددين مكعبين يكون الجميع منهما عددا مربعا، فنفرض ضلع المكعب الأصغر شيئا ليكون مكعبه كعبا واحدا، ونفرض ضلع المكعب كم شئنا من الأشياء، فنفرضه شيئين، فيكون المكعب الأعظم ثمانية كعاب، وجملتها تسعة كعاب، فنحتاج أن يكون ذلك مربعا فنعمل المربع من ضلع كم شئنا من الأشياء، فنعمله من ضلع ستة أشياء حتى يكون ستة وثلاثين مالا، فإذا التسعة كعاب تعادل ستة وثلاثين مالا.

اكتب النص باستعمال الرموز المعاصرة (يطلب الدقة مع التوضيح خطوة خطوة)، ثم أكمل حل المسألة.

التمرين الرابع:

1) ما هما العددان المتحابان ؟

2) أوجد القيمة المقربة إلى 10^{-2} للعدد $\sqrt{8799}$.

3) باستخدام طريقة شرف الدين الطوسي بين أن المعادلة $3x^2 = x^3 + 5$ لا تقبل حلا موجبا.

الإجابة النموذجية للامتحان النهائي (2012-2013)

التمرين الأول:

1) $3214 \equiv MMMCCXIV$

2) $3452 \equiv$ 𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺

3) نظام العد عند البابليين ستيني، عشري، مختلط، وضعي

التمرين الثاني:

كتاب الأصول ← أقليدس

الكرة والأسطوانة ← أرخميدس

كتاب الجبر والمقابلة ← الخوارزمي

المجسطي ← بطليموس

مقاليد علم الهيئة ← البيروني

التمرين الثالث:

نريد أن نجد عددين مكعبين يكون الجميع منهما عددا مربعا: $a^3 + b^3 = c^2$

فنفرض ضلع المكعب الأصغر شيئا: $a = x$

ليكون مكعبه كعبا واحدا: $a^3 = x^3$

ونفرض ضلع المكعب كم شئنا من الأشياء، فنفرضه شيئين: $b = 2x$

فيكون المكعب الأعظم ثمانية كعاب: $b^3 = 8x^3$

وجملتها تسعة كعاب: $a^3 + b^3 = 9x^3$

فنحتاج أن يكون ذلك مربعا فنعمل المربع من ضلع كم شئنا من الأشياء، فنعمله من ضلع ستة أشياء: $c = 6x$

حتى يكون ستة وثلاثين مالا: $c^2 = 36x^2$

فإذا التسعة كعاب تعادل ستة وثلاثين مالا: $9x^3 = 36x^2$

تكملة الحل: $x = 4$، $x^2 = 16$، $x^3 = 64$

التمرين الرابع:

1) العددان المتحابان كل عددين أحدهما ناقص، والثاني زائد، ومجموع عوامل كل منهما مساو للآخر

2) القيمة المقربة إلى 10^{-2} للعدد $\sqrt{8799}$ هي 93,80

8799	93,80
-81 6	$9^2=81$ $9\times2=18$
699 -549 150	$183\times3=549$ $93\times2=186$
15000 -14944 56	$1868\times8=14944$ $938\times2=1876$
5600 - 0 5600	$18760\times0=0$

3) استخدام طريقة شرف الدين الطوسي:

$3x^2 = x^3 + 5$ هي معادلة من الشكل $ax^2 = x^3 + c$. التي نكتبها من الشكل: $5 = x^2(3 - x)$.

نحن في الحالة $c > \frac{4a^3}{27}$، وبالتالي فالمعادلة $3x^2 = x^3 + 5$ لا تقبل حلا.

الامتحان الاستدراكي في مقياس تاريخ الرياضيات (2012-2013)

التمرين الأول:

1) كيف كان نظام العد عند اليونان ؟

2) ما هو بناء نظام الترقيم الروماني ؟

3) اذكر الترتيب الأبجدي للحروف العربية.

التمرين الثاني (05 نقاط): انسب الكتب التالية إلى مؤلفيها:

المدخل إلى علم العدد	ابن البنا المراكشي
البيان والتذكار في العمل برشوم الغبار	السموأل المغربي
تلخيص أعمال الحساب	ابن النديم
الفهرست	نيقوماخاوس الجرساني
الباهر في الجبر	أبو بكر الحصار

التمرين الثالث (06 نقاط): إليك النص التالي من كتاب صناعة الجبر لديوفونتس (ترجمة قسطا بن لوقا):

نريد أن نجد عددين مربعين يكون قسمة الأعظم منهما على الأصغر إذا زيدت على الأعظم كان المجتمع مربعا، وإن زيدت أيضا على الأصغر كان مربعا، فلنفرض العدد الأصغر مالا، ونجعل قسمة الأعظم على الأصغر نصف مال ونصف ثمن مال، فيكون إذا زدناه على مال كان المجتمع مربعا، ويكون العدد الأعظم نصف مال مال ونصف ثمن مال مال، فإذا زدنا عليه نصف مال ونصف ثمن مال يكون نصف مال مال ونصف ثمن مال مال ونصف مال ونصف مال ونصف ثمن مال ...

اكتب النص باستعمال الرموز المعاصرة (يطلب الدقة مع التوضيح خطوة خطوة)، ثم أكمل حل المسألة.

التمرين الرابع (05 نقاط):

1) أعط نص المسلمة الخامسة لأقليدس.

2) ما هو تعريف النقطة والمستقيم عند ريمان ؟

الإجابة النموذجية للامتحان الاستدراكي (2012-2013)

التمرين الأول:

1) نظام العد عند اليونانيين عشري غير وضعي

2) نظام الترقيم الروماني مبني على الطريقة الخماسية العشرية

3) ابجد هوز حطي كلمن سعفص قرشت ثخذ ضظغ

التمرين الثاني:

المدخل إلى علم العدد	ابن البنا المراكشي
البيان والتذكار في العمل برشوم الغبار	السموأل المغربي
تلخيص أعمال الحساب	ابن النديم
الفهرست	نيقوماخاوس الجرساني
الباهر في الجبر	أبو بكر الحصار.

التمرين الثالث:

نريد أن نجد عددين مربعين يكون قسمة الأعظم منهما على الأصغر إذا زيدت على الأعظم كان المجتمع مربعا: $\frac{a}{b}+a=c^2$

وإن زيدت أيضا على الأصغر كان مربعا: $\frac{a}{b}+b=d^2$

فلنفرض العدد الأصغر مالا: $a = x^2$

ونجعل قسمة الأعظم على الأصغر نصف مال ونصف ثمن مال: $\frac{a}{b} = \frac{a}{x^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{8}x^2 = \frac{9}{16}x^2$

فيكون إذا زدناه على مال كان المجتمع مربعا: $\frac{a}{b} + x^2 = \frac{9}{16}x^2 + x^2 = \frac{25}{16}x^2$

ويكون العدد الأعظم نصف مال مال ونصف ثمن مال مال: $a = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}.\frac{1}{8}x^4 = \frac{9}{16}x^4$

فإذا زدنا عليه نصف مال ونصف ثمن مال يكون نصف مال مال ونصف ثمن مال مال ونصف مال ونصف ثمن مال:

$$a + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}.\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{8}x^2 = \frac{9}{16}x^4 + \frac{9}{16}x^2$$

التمرين الرابع:

1) المسلمة الخامسة لأقليدس: إذا وقع خط على خطين فكان مجموع الزاويتين الداخليتين في أي من جهتيه أقل من قائمتين فإن الخطين إذا مدا في تلك الجهة يلتقيان

2) النقطة هي زوج مركب من نقطتين على سطح كرة، متقابلتين قطريا

المستقيمات على الكرة هي دوائرها الكبرى (ما يسمى بخطوط الطول ودوائر العرض).

بعض المراجع

المراجع باللغة العربية

1) أبو الوفاء البوزجاني عالم الرياضيات والفلكي الموسوعي (مقال)، د. بركات محمد مراد، جامعة عين شمس.

2) الأصول في الهندسة، إقليدس، ترجمة كريثيليوس فان دبك.

3) الإنشاءات الهندسية، مشروع دروس في الرياضيات خاصة بأساتذة التعليم الثانوي، وزارة التربية الوطنية.

4) التحليل الرياضي، التوابع ذات متغير حقيقي، قسم 1 و 2، ج. شيلوف، تعريب أ . خ سعد الله، ديوان المطبوعات الجامعية، 1991.

5) التحليل الرياضي، التوابع ذات متغيرات حقيقية متعددة، جزء 1 و 2، ج. شيلوف، تعريب أ . خ سعد الله، ديوان المطبوعات الجامعية، 1983.

6) الجبر العالي، أ. كوروش، ترجمة محمد إبراهيم حسن رزق، دار مير، موسكو، 1977.

7) الجبر والمقابلة، محمد بن موسى الخوارزمي، تحقيق: د.علي مصطفى مشرفة ود. محمد مرسي أحمد، دار الكاتب العربي للطباعة والنشر، مصر، 1968.

8) الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر (مؤلفات شرف الدين الطوسي)، رشدي راشد، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، الطبعة الأولى، 1998.

9) الرياضيات المسلية، أ.خ سعد الله، ديوان المطبوعات الجامعية، .1995.

10) العدد من الحضارات القديمة حتى عصر الكمبيوتر، جون ماكليش، ترجمة: د. خضر الأحمد ود. موفق دعبول، مجلة المعرفة، العدد 251، نوفمبر 1999.

11) المدخل إلى صناعة الهندسة، قسطا بن لوقا البعلبكي، تحقيق يوسف قرقور، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

12) المسلمة الخامسة لإقليدس وظهور هندسات غير إقليدية، فاطمة عدار وحميدة شيبان، مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة، 2003/ 2004.

13) الملتقى الوطني الأول حول تاريخ الرياضيات العربية، غرداية، 1993.

14) الهندسة الإقليدية وعلاقتها بالجبر والمقابلة، يوسف قرقور، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

15) بعض الوقفات التاريخية، د. أحمد بشير.

16) تاريخ الرياضيات، مطبوعة موجهة لتكوين الأساتذة عن بعد، يوسف قرقور، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

17) دروس الرياضيات العامة، الصف الثالث الثانوي، الفرع الأدبي، محمد هلال اليوسفي ورفاة القسوي، دمشق، 1961 – 1962.

18) دور البوزجاني الحاسب في الحضارة العربية والإسلامية (مقال)، معالي عبد الحميد حمودة.

19) كراس حلقة ابن الهيثم حول تاريخ الرياضيات العربية، الأعداد من 01 إلى 09، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

20) لمحة تاريخية عن تطور المنطق عبر العصور، يوسف قرقور، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

21) مجلة الوصل: عدد تجريبي صدر عن المدرسة العليا للأساتذة سنة 1996.

22) مضمون الرياضيات الصينية، محمد لبوخي وحكيم زكريفة، مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة، 2006/ 2007.

23) مطبوعة حول الجانب التاريخي لنظرية التوزيعات، أبو بكر خالد سعد الله، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

24) مفتاح الحساب، جمشيد غياث الدين الكاشي، تحقيق: نادر النابلسي، مطبعة جامعة دمشق، 1977م.

25) مقاليد علم الهيئة، أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني، تحقيق وترجمة: ماري تيريز دي بارنو، دمشق، 1985م.

26) مقدمة في تاريخ الرياضيات، د. عبد العظيم أنس، دار المستقبل العربي، مصر، 1997م.

27) موجز تاريخ العلم والحضارة في الصين، جوزيف نيدهام، ترجمة محمد غريب جودة، الهيئة المصرية العامة للكتاب، 1995م.

28) نيكولا بورباكي وهشاشة الرياضيات (مقال)، أبو بكر خالد سعد الله، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

المراجع باللغتين الفرنسية والإنجليزية

29) Abrégé d' histoire des mathématiques 1700-1900, Jean Dieudonné (tom 01, tome 02)

30) Aspect historique de quelques notions d'analyse .

31) Bordas encyclopédie, 50/51 mathématiques, Belgique, 1972.

32) Elément d' histoire des mathématiques: N. Bourbaki, Masson, Paris, 1984.

33) Histoire de calcule, René Taton, presse universitaires de France, Paris, 1969.

34) Histoire de l’analyse, Pierre Ducag, Vuibert, 2003

35) Histoire de l’analyse des séries chronologiques, Jean-Marie Dufour, 2006

36) Histoire des sciences, David Sénéchal, Université de Sherbrooke, 2001

37) History of mathematics, A. Brief, The open court publishing company, Chicago

38) History of modern mathematics, David Eugene Smith, 4 edition, 1906.

39) Paysage de nombres avec vue sur la g_eom_etrie, Michel Granger, 2005.

40) Les recherches sur l'oeuvre de Poincaré, Philippe Nabonnand, Université de Nancy.

41) Une histoire des mathématiques, A. Dahn-Dalmedico, Jeanne Peiffre, édition de seuil, 1986.

الفهرس