ESPACES TOPOLOGIQUES
Vocabulaire et Notions de base

Prof. N. Merazga

29 octobre 2024

Table des matières

1 Topologie, ouverts, fermés et voisinages

On désigne par X un ensemble non vide quelconque et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1 *Une famille τ de parties de X est appelée topologie sur X si elle vérifie :*

(O1) $X, \varnothing \in \tau$.

(O2) *τ est stable par union quelconque, i.e. une réunion quelconque (finie ou non) d'éléments de τ est encore un élément de τ.*

(O3) *τ est stable par intersection finie, i.e. une intersection finie d'éléments de τ est encore un élément de τ.*

Dans ce cas, le couple (X, τ) est appelé espace topologique, et les éléments de τ sont appelés les ouverts (ou les parties ouvertes) de X.

Remarque 1 Pour établir la propriété (O3), il suffit de vérifier que l'intersection de *deux* éléments de τ est encore un élément de τ.

Exemple 1 (Topologie discrète) X avec $\tau = \mathcal{P}(X)$. C'est la topologie la plus grande en termes de nombre d'ouverts : toute partie de X est un ouvert. (X, τ) est appelé espace topologique *discret*.

Exemple 2 (Topologie grossière) X avec $\tau = \{\varnothing, X\}$. C'est la topologie la plus petite en termes de nombre d'ouverts : les seuls ouverts sont $\varnothing$ et X est un ouvert. (X, τ) est appelé espace topologique *grossier*.

Exemple 3 $X = \{a, b\}$ avec $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$.
Les ouverts sont : $\varnothing, X$ et $\{a\}$.

Exemple 4 Sur $X = \{a, b, c\}$,
la famille $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ est une topologie,
la famille $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c\}\}$ n'est pas une topologie car $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \tau_2$,
la famille $\tau_3 = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ n'est pas une topologie car $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau_3$.

Exemple 5 Sur $X = [0, +\infty[$, la famille τ constituée de $X, \varnothing$ et de tous les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}_+$ est une topologie sur X.

Exemple 6 (Topologie usuelle de $\mathbb{R}$) Sur $X = \mathbb{R}$, la famille τ de toutes les parties $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante

$$\forall x \in \mathcal{O},\ \exists\, h > 0 \text{ tel que }]x-h, x+h[\subset \mathcal{O},$$

est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Pour cette topologie,

- tout intervalle ouvert $]a,b[$ (où $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) est un ouvert (pour tout $x \in]a,b[$ on peut prendre $h = \min\{x-a, b-x\}$),
- l'ensemble $]a,b[\cup]c,d[$ (où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ avec $a < b \leq c < d$) est un ouvert,
- les ensembles $]a,+\infty[$ et $]-\infty,a[$(où $a \in \mathbb{R}$) sont des ouverts,
- l'ensemble $]a,b]$ (où $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) n'est pas un ouvert car pour le point b il n'existe aucun réel $h > 0$ tel que $]b-h, b+h[$ soit inclus dans $]a,b]$,
- l'ensemble $\{a\}$ (où $a \in \mathbb{R}$) n'est pas un ouvert et, plus généralement, toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas un ouvert car ne contient aucun intervalle ouvert,
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est pas un ouvert, car en raison de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il n'existe aucun intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{Q}$.
- l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas un ouvert, car en raison de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il n'existe aucun intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposition 1 *Tout ouvert dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est la réunion d'intervalles ouverts de la forme $]a,b[$ où $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ (par convention $\bigcup_{\varnothing} = \varnothing$).*

Preuve. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, alors

$$\forall x \in \mathcal{O},\ \exists\, h_x > 0 :\ ]x-h_x, x+h_x[\subset \mathcal{O}.$$

Posons $I_x =]x-h_x, x+h_x[$; alors $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{O}} I_x \subset \mathcal{O}$, d'où $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} I_x$. ■

Définition 2 (Fermé) *Un sous-ensemble F d'un espace topologique X est dit fermé, si son complémentaire $F^c = X \setminus F$ est un ouvert. On note $\mathcal{F}$ la famille de tous les fermés de X.*

Exemple 7 Pour la topologie discrète sur X, toute partie de X est un fermé.

Exemple 8 Pour la topologie grossière sur X, les seuls fermés sont $\varnothing$ et X.

Exemple 9 $X = \{a,b\}$ avec $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$.
Les fermés de (X,τ) sont : $X, \varnothing$ et $\{b\}$.

Exemple 10 $X = \{a, b, c, d, e\}$ avec $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$.
Les fermés de (X, τ) sont : $X, \varnothing, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ et $\{a\}$.
On remarque qu'il existe des parties qui sont ouvertes et fermées à la fois, comme il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Exemple 11 Sur $X = [0, +\infty[$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, X\} \cup \{]a, +\infty[\ ;\ a \in \mathbb{R}_+\}$, les fermés sont $X, \varnothing$ et tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a \in \mathbb{R}_+$ ($[0, 0] = \{0\}$).

Exemple 12 Sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle,

- l'intervalle fermé $[a, b]$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) est un ensemble fermé car son complémentaire $]-\infty, a[\, \cup\,]b, +\infty[$ est un ouvert,
- les intervalles $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) sont des ensembles fermés,
- l'ensemble $\{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$), et toute partie finie de $\mathbb{R}$, est un fermé car son complémentaire $]-\infty, a[\, \cup\,]a, +\infty[$ est un ouvert,
- l'ensemble $[a, b[$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) n'est ni un ouvert ni un fermé.

Remarque 2

1. $\varnothing, X$ sont des parties ouvertes et fermées à la fois pour toute topologie sur X.
2. Une partie d'un espace topologique peut être ouverte ou fermée ou ouverte et fermée à la fois ou ni ouverte ni fermée.

Des égalités bien connues (lois de De Morgan)

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

on déduit des propriétés (O1), (O2) et (O3) celles des fermés.

Proposition 2 *La famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de (X, τ) vérifie*

(F1) *$\varnothing$ et X sont des fermés.*

(F2) *Toute intersection de fermés est un fermé.*

(F3) *Une réunion finie de fermés est un fermé.*

Remarque 3 La réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé. En effet, dans $\mathbb{R}$ usuel les intervalles $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ sont des fermés mais

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1].$$

Définition 3 (Voisinage d'un point) *On dit qu'une partie V d'un espace topologique (X,τ) est un voisinage d'un point $a \in X$ si V contient un ouvert contenant a. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages du point a. Ainsi,*

$$V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists \mathcal{O} \in \tau : a \in \mathcal{O} \subset V.$$

Exemple 13 Si $X = \{a,b\}$ et $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$, on a

$$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, X\}, \quad \mathcal{V}(b) = \{X\}.$$

Exemple 14 Si $X = \{a,b,c\}$ et $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,c\}\}$, on a

$$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}, \quad \mathcal{V}(b) = \{\{b,c\}, X\}, \quad \mathcal{V}(c) = \{\{b,c\}, X\}.$$

Exemple 15 Pour la topologie grossière sur X, $\mathcal{V}(a) = \{X\}$ pour tout point $a \in X$.

Exemple 16 Pour la topologie discrète sur X, toute partie de X contenant le point $a \in X$ est un voisinage de a.

De la définition ci-dessus, découle le résultat suivant.

Proposition 3 (Caractérisation des ouverts) *Pour qu'un sous-ensemble non vide A d'un espace topologique (X,τ) soit un ouvert il faut et il suffit qu'il soit voisinage de tous ses points.*

Preuve.
Nécessité. Si A est un ouvert non vide alors il est voisinage de tous ses points en vertu de la définition 3 (on prend $\mathcal{O} = A$).
Suffisance. Supposons que A soit voisinage de tous ses points, alors

$$\forall a \in A, \exists \mathcal{O}_a \in \tau : \quad a \in \mathcal{O}_a \subset A,$$

d'où $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} \mathcal{O}_a \subset A$, et donc $A = \bigcup_{a \in A} \mathcal{O}_a \in \tau$. ■

Proposition 4 (Propriétés principales des voisinages) *Soit (X,τ) un espace topologique et $\mathcal{V}(a)$ la famille des voisinages d'un point a de X.*

(V1) *Tout voisinage de a contient a (donc n'est pas vide) :*

$$V \in \mathcal{V}(a) \implies a \in V.$$

(V2) *Toute partie de X contenant un voisinage de a est aussi un voisinage de a :*

$$(V \in \mathcal{V}(a) \text{ et } V' \supset V) \implies V' \in \mathcal{V}(a).$$

(V3) *La famille $\mathcal{V}(a)$ est stable par intersection finie, i.e. l'intersection finie de voisinages de a est encore un voisinage de a.*

(V4) *Si $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $W \subset V$ et $V \in \mathcal{V}(b)$ pour tout $b \in W$.*

Preuve. Les propriétés (V1) et (V2) sont évidentes. Pour (V3), on écrit

$$\forall i = 1, ..., n, \ \exists \mathcal{O}_i \in \tau : \quad a \in \mathcal{O}_i \subset V_i$$

d'où $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Comme $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ est un ouvert, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de a. Dans (V4), il suffit de prendre $W = \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est l'ouvert dans la définition 3. ■

2 Intérieur, adhérence et frontière

Définition 4 *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X.*

– *On dit qu'un point x de X est intérieur à A si A est un voisinage de x, i.e. s'il existe $\mathcal{O} \in \tau$ t.q. $x \in \mathcal{O} \subset A$.*
  L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A et est noté $\mathring{A}$.

– *On dit qu'un point x de X est adhérent à A si tout voisinage de x contient un point de A, i.e.*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) : V \cap A \neq \varnothing.$$

  L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A et est noté $\overline{A}$.

– *On dit qu'un point x de X est un point frontière de A si tout voisinage de x rencontre à la fois A et le complémentaire de A, i.e.*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) : V \cap A \neq \varnothing \text{ et } V \cap A^c \neq \varnothing.$$

  L'ensemble des points frontières de A est appelé frontière de A et est noté ∂A ou $Fr(A)$. Autrement dit,

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Remarque 4 Par définition, il vient immédiatement

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A},$$

i.e. tout point intérieur à A appartient à A, et tout point de A est adhérent à A.

Exemple 17 Sur $X = \{a, b\}$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$, donner l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $\{a\}$ et de $\{b\}$.

Réponse : $\overset{\circ}{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{a\}} = X$, $\overset{\circ}{\{b\}} = \varnothing$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$,
$\partial(\{a\}) = \overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}} = \{b\}$, $\partial(\{b\}) = \overline{\{b\}} \cap \overline{\{a\}} = \{b\}$.

Exemple 18 Sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la topologie

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

donner l'adhérence, l'intérieur et la frontière de l'ensemble $A = \{b, c, d\}$.

Réponse : $\overset{\circ}{A} = \{c, d\}$, $\overline{A} = \{b, c, d, e\}$,
$A^c = \{a, e\}$, $\overline{A^c} = \{a, b, e\}$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \{b, e\}$

Exemple 19 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:

- $\overset{\circ}{\{a\}} = \varnothing$, $\overline{\{a\}} = \{a\}$,
- $\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b[}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,b[}} =]a,b[$, $\overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]$,
- $\overset{\circ}{\widehat{[a,+\infty[}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,+\infty[}} =]a,+\infty[$, $\overset{\circ}{\widehat{]-\infty,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{]-\infty,b[}} =]-\infty,b[$,
- $\overline{[a,+\infty[} = \overline{]a,+\infty[} = [a,+\infty[$, $\overline{]-\infty,b]} = \overline{]-\infty,b[} =]-\infty,b]$,
- $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \varnothing$, (tout intervalle ouvert contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels)
- $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
- $\overline{\left\{\frac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}} = \left\{\frac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$.

Proposition 5 *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X.*

1. *$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de X contenu dans A, i.e. $\overset{\circ}{A} \in \tau$ et*

$$\forall \mathcal{O} \in \tau : \quad \mathcal{O} \subset A \implies \mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}.$$

2. *A est ouverte si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*

3. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé de X contenant A, i.e. $\overline{A}$ est un fermé et si F est un fermé et $A \subset F$ alors $\overline{A} \subset F$.*

4. *A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

5. *$\complement \overset{\circ}{A} = \overline{\complement A}$ et $\complement \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$.*
L'ensemble $\complement \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$ est appelé <u>extérieur</u> de A et est noté $\mathrm{Ext}(A)$.

Remarque 5 Des points 1. et 3. de la proposition ci-dessus, on déduit que

1. $\overset{\circ}{A}$ coïncide avec la réunion de tous les ouverts de X contenus dans A :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{\mathcal{O}\in\tau \\ \mathcal{O}\subset A}} \mathcal{O}.$$

2. $\overline{A}$ coïncide avec l'intersection de tous les fermés de X contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F\supset A}} F.$$

L'ensemble $\bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F\supset A}} F$ est appelé *fermeture de A.*

Exemple 20 Pour une partie A d'un espace grossier X, on a

$$\begin{aligned} \overline{A} &= X \text{ si } A \neq \varnothing, \\ \overset{\circ}{A} &= \varnothing \text{ si } A \neq X. \end{aligned}$$

Exemple 21 Pour une partie A d'un espace discret X, on a

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A \quad (\text{car } A \text{ est un fermé}), \\ \overset{\circ}{A} &= A \quad (\text{car } A \text{ est un ouvert}). \end{aligned}$$

Proposition 6 *Soit (X, τ) un espace topologique et A et B deux parties de X.*

1. $\overset{\circ}{X} = X$,
2. $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$,
3. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,
4. $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, *et en général* $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$ *si I est infini (pas d'égalité en général),*
5. $(A \overset{\circ}{\cup} B) \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ *(pas d'égalité en général).*

Proposition 7 (duale de la proposition 6) *Soit (X, τ) un espace topologique et A et B deux parties de X.*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$,
2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$,

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

5. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *(pas d'égalité en général).*

Remarque 6 1. L'égalité dans 4) n'est plus vraie en général pour une famille quelconque de parties de X comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \overline{\{r\}} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\} = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Mais on a toujours

$$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

2. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. Pour $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{array}{lll} A \cap B = \varnothing & \text{et} & \overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing, \\ \overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R} & \text{et} & \overline{A} \cap \overline{B} \neq \mathbb{R}. \end{array}$$

Donc en général $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$, mais on a toujours

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Proposition 8 (Propriétés de la frontière) *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X de frontière ∂A.*

1. *∂A est un fermé (comme intersection de deux fermés),*
2. $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$,
3. $A \cup \partial A = \overline{A}$,
4. $A \setminus \partial A = \overset{\circ}{A}$,
5. $\partial A = \partial(A^c)$,
6. *A ouvert et fermé $\Longleftrightarrow$ $\partial A = \varnothing$.*

Exemple 22 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a
- $\partial\left([a,b]\right) = \partial\left([a,b[\right) = \partial\left(]a,b]\right) = \partial\left(]a,b[\right) = [a,b] \setminus]a,b[= \{a,b\}$,
- $\partial\left([a,+\infty[\right) = \partial\left(]a,+\infty[\right) = \{a\}$,
- $\partial\left(]-\infty,b]\right) = \partial\left(]-\infty,b[\right) = \{b\}$,

– $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est un fermé ($\complement\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ *est une réunion d'ouverts*) d'intérieur vide,

– $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}$, $\quad \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \setminus \widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}^{\circ} = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}$.

Des points 3. et 4. de la proposition ci-dessus, il découle

Corollaire 1 *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X.*

1. *A est fermée si et seulement si A contient sa frontière,*

$$A \text{ fermée} \iff \partial A \subset A.$$

2. *A est ouverte si et seulement si A ne rencontre pas sa frontière,*

$$A \text{ ouverte} \iff A \cap \partial A = \varnothing.$$

On distingue **deux types de points adhérents.**

Définition 5 (Points isolés, points d'accumulation) *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X. Pour $x \in \overline{A}$, on a deux possibilités :*

i) *Soit il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$. On dit que x est un point isolé de A. Dans ce cas $x \in A$.*

ii) *Soit pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \{x\}$, i.e. V contient au moins un point de A distinct de x. On dit que x est un point d'accumulation de A.*

L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé ensemble dérivé de A et est noté A'.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x \text{ point isolé de } A &\iff \exists V \in V(x) : \quad V \cap A = \{x\}, \\
x \text{ point d'accumulation de } A &\iff \forall V \in V(x) : \quad V \cap A \neq \varnothing \text{ et } V \cap A \neq \{x\} \\
&\iff \forall V \in V(x) : \quad (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.
\end{aligned}$$

Remarque 7 Il s'ensuit immédiatement de la définition 5 que tout point adhérent à A et n'appartenant pas à A est un point d'accumulation, i.e.

$$\overline{A} \setminus A \subset A'.$$

Remarque 8 Des définitions 4 et 5, découle que

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Exemple 23 Sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{c, d, e\}\}$, donner les points d'accumulation et les points isolés de l'ensemble $A = \{b, c, d\}$.

Réponse : $\overline{A} = X$, $A' = \{a, c, d, e\}$, b est le seul point isolé de A.

Exemple 24 Sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$, donner les points d'accumulation et les points isolés de l'ensemble $A = \{b, c, d\}$.

Réponse : $\overline{A} = \{b, c, d, e\}$, $A' = \{b, c, d, e\}$, aucun point isolé dans A.

Exemple 25 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle,

i) 0 et 1 sont des points isolés de l'ensemble $A = \{0, 1\}$. Plus généralement, tous les points d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ sont isolés.

ii) 2 est un point isolé de l'ensemble $A = [0, 1] \cup \{2\}$. Le reste des points de A sont des points d'accumulation : $A' = [0, 1]$.

iii) tout point de $\mathbb{Z}$ est isolé.

iv) tout point de $\mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple 26 Dans un espace topologique discret, tous les points sont isolés.

Comme une partie A d'un espace topologique contient ses points isolés, il résulte du point 4. de la proposition 5 que

Corollaire 2 *Une partie A d'un espace topologique est fermée si et seulement si A contient ses points d'accumulation.*

Preuve. $A' \subset A \iff A' \cup A = A \iff \overline{A} = A \iff A$ fermée. ∎

3 Espaces séparés

Définition 6 (Espace séparé) *Un espace topologique X est dit espace séparé (ou de Hausdorff) si pour tout couple (a, b) d'éléments distincts de X, il existe deux voisinages V_a de a et V_b de b tels que $V_a \cap V_b = \varnothing$.*

Remarque 9 Il revient au même de dire que X est séparé si pour tout couple (a,b) d'éléments distincts de X, il existe un ouvert $\mathcal{O}_a$ contenant a et un ouvert $\mathcal{O}_b$ contenant b tels que $\mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b = \varnothing$.

Exemple 27 $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparé. Pour deux réels distincts a et b, on peut prendre $V_a =]a-h, a+h[$ et $V_b =]b-h, b+h[$ avec $h = \frac{|b-a|}{2}$.

Exemple 28 On munit $X = \{a,b\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}\}$.
(X,τ) n'est pas séparé car il n'existe aucune paire de voisinages V_a de a et V_b de b t.q. $V_a \cap V_b = \varnothing$.

Exemple 29 On munit $X = \{a,b,c,d,e\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$.
(X,τ) n'est pas séparé car il n'existe aucun ouvert $\mathcal{O}_c$ contenant c et aucun ouvert $\mathcal{O}_d$ contenant d t.q. $\mathcal{O}_c \cap \mathcal{O}_d = \varnothing$.

Exemple 30 Un espace topologique discret est séparé. Pour deux points distincts a et b, on peut prendre $\mathcal{O}_a = \{a\}$ et $\mathcal{O}_b = \{b\}$.

Exemple 31 Un espace topologique grossier, contenant plus d'un point, ne peut être séparé.

Proposition 9 *Dans un espace séparé X, tout singleton est fermé et, par conséquent, toute partie finie est fermée.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\{x\}$ est fermé, où $x \in X$ est arbitraire. Soit $y \in \{x\}^c$ (on suppose que X n'est pas un singleton). Alors on peut choisir un ouvert $\mathcal{O}_y$ qui contient y mais pas x. Il s'ensuit que $\{x\}^c = \bigcup\limits_{y \in \{x\}^c} \mathcal{O}_y$ qui est alors réunion d'ouverts, donc ouvert. Par conséquent, $\{x\}$ est fermé. ■

Proposition 10 *Dans un espace séparé, un point x est un point d'accumulation d'une partie A si et seulement si tout voisinage de x coupe A en un nombre infini de points.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

De la proposition ci-dessus découle le

Corollaire 3 *Une partie finie d'un espace séparé n'admet aucun point d'accumulation.*

Définition 7 *Un espace topologique séparé X est dit* <u>*normal*</u> *s'il vérifie la condition suivante :*
"Pour chaque paire A, B de fermés disjoints de X, il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_B$ avec $A \subset \mathcal{O}_A$ et $B \subset \mathcal{O}_B$".

4 Densité, espaces séparables

Définition 8 *Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X, τ). On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$, i.e. si tout point de B est adhérent à A.*
Si A est dense dans X, i.e. $\overline{A} = X$, on dit que A est partout dense.

Exemple 32 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont partout denses.
- $A =]0, 1[$ est dense dans $B = [0, 1[$ car $B \subset \overline{A} = [0, 1]$.

Exemple 33 On munit $X = \{a, b, c, d, e\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c, d\}\}$.
$A = \{a, d\}$ est partout dense car $\overline{A} = X$.

Exemple 34 Dans un espace topologique grossier X, toute partie non vide est partout dense.

Exemple 35 Dans un espace topologique discret X, la seule partie partout dense est X lui-même.

Proposition 11 *Soient A, B et C trois parties d'un espace topologique (X, τ). Si A est dense dans B et si B est dense dans C, alors A est dense dans C. Autrement dit, la notion de densité est transitive.*

Preuve. $(B \subset \overline{A}$ et $C \subset \overline{B}) \implies (\overline{B} \subset \overline{A}$ et $C \subset \overline{B}) \implies C \subset \overline{A}$. ■

La proposition suivante fournit une caractérisation importante de densité.

Proposition 12 *Une partie A d'un espace topologique (X, τ) est dense dans X si et seulement si tout ouvert non vide de X rencontre A,*

$$\overline{A} = X \iff \forall \mathcal{O} \in \tau \setminus \{\varnothing\} : \ \mathcal{O} \cap A \neq \varnothing.$$

Preuve. Supposons $\overline{A} = X$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de X, et soit x un point de $\mathcal{O}$. Comme x est un point adhérent à A alors tous ses voisinages, y compris $\mathcal{O}$, rencontrent A.

Inversement, supposons que tout ouvert non vide de X rencontre A. Soit $x \in X$; tout voisinage V de x contient un ouvert $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O} \cap A \neq \varnothing$, alors $V \cap A \neq \varnothing$, ce qui signifie que $x \in \overline{A}$. Conclusion : $\overline{A} = X$. ■

Définition 9 (Ensemble dénombrable) *Un ensemble X est dit* <u>*dénombrable*</u> *s'il existe une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ sur X, c'est-à-dire si l'on peut ranger les éléments de X en une suite*

$$X = \{\phi(0), \phi(1), ..., \phi(n), ...\}$$

où $\phi(n) \neq \phi(p)$ si $n \neq p$. La bijection ϕ peut aussi être notée de façon indicielle : $\phi(n) = x_n$; alors

$$X = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\} .$$

Exemple 36 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables, alors que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et tous les intervalles de type (a, b) avec $a < b$, sont non dénombrables.

Remarque 10 Un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable ne peut être que fini ou dénombrable.

Remarque 11 La réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Remarque 12 Le produit cartésien fini ou dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Définition 10 (Espace séparable) *On dit qu'un espace topologique (X, τ) est séparable s'il admet une partie finie ou dénombrable partout dense.*

Exemple 37 $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparable puisque l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exemple 38 Un espace topologique discret ne peut être séparable sauf s'il est fini ou dénombrable.

Remarque 13 Il n'y a aucun lien entre la notion d'espace séparé et celle d'espace séparable.

Proposition 13 *Dans un espace topologique séparable, toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints est nécessairement finie ou dénombrable.*

Preuve. Soient $D = \{x_n ; n \in J\}$ (avec $J \subset \mathbb{N}$) une partie finie ou dénombrable et dense dans un espace topologique X et $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X. D'après la proposition 12, pour tout $i \in I$, il existe $n \in J$ tel que $x_n \in \mathcal{O}_i$. Soit $n_i = \inf\{n \in J ; x_n \in \mathcal{O}_i\}$, alors l'application $i \mapsto n_i$ est injective de I dans J, donc I est fini ou dénombrable. ■