Propriétés :

1) $\sum_{i\in I} P(X=x_i / Y=y_j) = 1$

2) $\forall i,\ \underset{P_{ij}}{P(X=x_i, Y=y_j)} = \begin{cases} P(X=x_i / Y=y_j)\,\underset{P_{\cdot j}}{P(Y=y_j)} & \text{si } P(Y=y_j)\neq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

théorème des probabilités composées.

3) $\underset{P_{i\cdot}}{P(X=x_i)} = \sum_{j\in J} P(X=x_i / Y=y_j)\,\underset{P_{\cdot j}}{P(Y=y_j)}$; $\sum_{i\in I} P(Y / X=x_i)P(X=x_i) = P(Y=y_j)$.

Théorème de probabilité Totale :

Dém

1) $\sum_{i\in I} P(X=x_i / Y=y_j) = \sum_{i\in I} \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{\sum_{i\in I} P_{ij}}{P_{\cdot j}} = \frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot j}} = 1.$

2) De la définition

3) On a $P(X=x_i / Y=y_j)\,P(Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} P(Y=y_j)$

$= P(X=x_i, Y=y_j)$

Donc

$\sum_{i\in I} P(X=x_i / Y=y_j)\,P(Y=y_j) = \sum_{i\in I} P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)$

Exemple : soit le couple aléatoire (X,Y) de support $D=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ de loi conjointe $P((X,Y)=(0,0)) = P(X=0, Y=0) = P_{00} = 0{,}4$, $P_{01} = 0{,}2$

$P_{10} = 0{,}1$, $P_{11} = 0{,}3$.

Trouver la loi de X sachant que $Y=1$.

On a $X(\Omega) = \{0,1\}$

$P(X=0/Y=1) = \frac{P(X=0, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P_{01}}{\sum_{i=0}^{1} P(X=i, Y=1)} = \frac{P_{01}}{P(0,1)+P_{11}} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 2/5$

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P_{11}}{P(Y=1)} = \frac{P_{11}}{P_{01}+P_{11}} = \frac{0,3}{0,5} = 3/5 .$$

On remarque que $P(X=0|Y=1) + P(X=1|Y=1) = 2/5 + 3/5 = 1$

Exercice P 13

Solution On a $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{3} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{3} (A \cap B_i)$

On a $B_i \cap B_j = \phi$ $i \neq j = \overline{1,3}$ donc $A \cap B_i \cap A \cap B_j = A \cap B_i \cap B_j = \phi$ $i \neq j, i = \overline{1,3}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i) P(B_i)$$ (Théorème de probabilité Totale)

$A|B_i = \{$ l'article tiré fonctionnera sans défaillance et cet article appartient à l'usine $U_i \}$

$$P(B_i) = \frac{n_i}{n} , \quad P(A|B_i) = P_i$$

$$P(A) = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2 + n_3 P_3}{n} .$$

Théorème de Bayes : Soit (X,Y) Couple de v.a.d, Alors

$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$P(X=x_i|Y=y_j) = \frac{P(Y=y_j|X=x_i)P(X=x_i)}{\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(Y|X=x_i) P(X=x_i)}$$

$$P(Y=y_j|X=x_i) = \frac{P(X=x_i|Y=y_j) P(Y=y_j)}{\sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X=x_i/Y=y_j) P(Y=y_j)} .$$

Dém :

$$P(X=x_i|Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$$

mais On a $P(X=x_i, Y=y_j) = P(Y=y_j, X=x_i)$

$$= P(Y=y_j \mid X=x_i)\, P(X=x_i)$$

et d'après théorème de probabilité Total On a :

$P(Y=y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(Y=y_j / X=x_i)\, P(X=x_i)$. Donc

$$P(X=x_i \mid Y=y_j) = \frac{P(X=x_i \mid Y=y_j)\, P(Y=y_j)}{\sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X=x_i \mid Y=y_j)\, P(Y=y_j)}.$$

Conditionnement d'une v.a.d par rapport à un événement

Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 0$ et X une v.a.d tel que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ tel que x_i sont distinctes deux à deux On a :

$$\sum_{i \in I} P(X=x_i \mid A) = \sum_{i \in I} \frac{P([X=x_i] \cap A)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{i \in I} (X=x_i) \cap A\right)}{P(A)}$$

Cas Continue : Soit (X,Y) un Couple aléatoire de densité conjointe f_{XY}, On définit la densité conditionnelle de Y sachant que $X=x$ (resp. de X sachant $Y=y$) par la relation

$$f_{Y/X}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ avec } f_X(x) \neq 0 \left(\text{resp } f_{X/Y} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \right.$$

telle que $f_Y(y) \neq 0)$

Exemple Considérons la densité suivante :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) tracer le support de (X,Y)

2) Déterminer les densités marginales

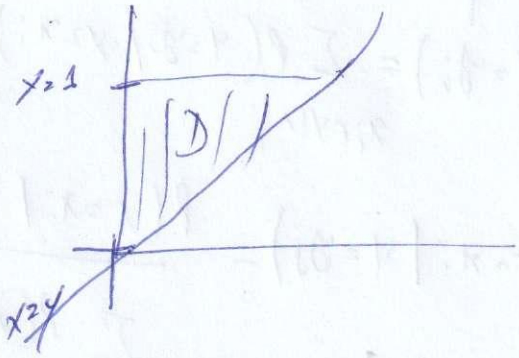
3) " les fs de répartition marginale

4) " les densités conditionnelles

5) " les fs de répartitions "

Solutions

1) le support D



2) $f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{y=x}^{y=1} 6x\,dy$

$= 6xy\Big]_{y=x}^{y=1} = -6x^2+6x = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{si non}\end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{x=0}^{x=y} 6x\,dx = 3x^2\Big]_{x=0}^{x=y} = \begin{cases} 3y^2 & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{si non}\end{cases}$

3) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

si $x<0$ $\quad F_X(x) = 0 \quad (f_X(x)=0)$

si $0\le x\le 1$ $\quad F_X(x) = \int_0^x 6t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3$

$= x^2(3-2x) \quad 0\le x\le 1$

si $x>1$ $\quad F_X(x) = \int_0^1 f_X(t)\,dt = 1$

$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$

si $y<0$ $\quad F_Y(y) = 0 \quad (f_Y(y)=0)$

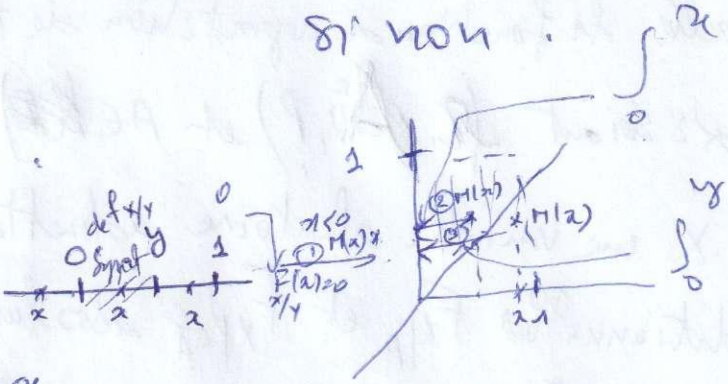
si $0\le y\le 1$ $\quad F_Y(y) = \int_0^y f_Y(t)\,dt = \int_0^y 3t^2\,dt = y^3 \quad 0\le y\le 1$

si $y\geq 1$ $\quad F_Y(y) = \int_0^1 3t^2\,dt = 1.$

4) $$f_{X/Y=y}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{6x}{3y^2} = \dfrac{2x}{y^2} & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$f_{Y/X=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{6x}{6x(1-x)} = \dfrac{1}{1-x} & \text{si } 0 \le x \le y \le 1 . \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

5) $F_{X/Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X/Y=y}(t)\,dt .$

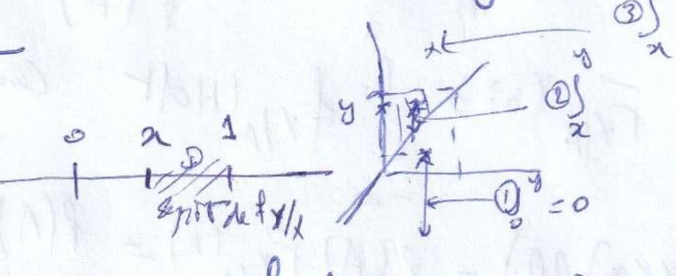


si $x<0$ $\quad F_{X/Y=y}(x) = 0 .$

si $0 \le x \le y$ $\quad F_{X/Y}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X/Y=y}(t)\,dt = \int_0^x \frac{2t}{y^2}\,dt = \frac{x^2}{y^2} \quad 0 \le x \le y \le 1$

si $x \ge y$ $\quad F_{X/Y}(x) = \int_0^y f_{X/Y=y}(t)\,dt = \int_0^y \frac{2t}{y^2}\,dt = \left.\frac{t^2}{y^2}\right]_0^y = \frac{y^2}{y^2} = 1 .$

* $F_{Y/X=x}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y/X=x}(t)\,dt$



On a $0 \le x \le y \le 1$

si $y<x$ $\quad F_{Y/X=x}(y) = 0$ car $f_{Y/X=x}(y) = 0$ si $y<x$

si $x \le y \le 1$ $\quad F_{Y/X=x}(y) = \int_x^y f_{Y/X=x}(t)\,dt = \int_x^y \frac{1}{1-x}\,dt = \left.\frac{t}{1-x}\right|_{t=x}^{t=y} = \frac{y-x}{1-x} \quad 0 \le x \le y \le 1$

si $y \ge 1$ $\quad F_{Y/X=x}(y) = \int_x^1 f_{Y/X=x}(t)\,dt = \int_x^1 \frac{1}{1-x}\,dt = \left.\frac{t}{1-x}\right|_x^1 = \frac{1-x}{1-x} = 1 .$

Conditionnement d'une variable continue par un événement :

Proposition Soient X v.a.c et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $P(A) \neq 0$.
l'application
$$F_{X/A}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F_{X/A}(x) = P\left[X \leq x \,/\, A\right]$$
s'appelle la fonction de répartition de X sachant A.

Lemme : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $A \in$ $\mathcal{A}$ tel que $0 < P(A) < 1$
et X une variable aléatoire admettant des fs de répartitions conditionnelles $F_{X/A}$ et $F_{X/{}^cA}$ absolument continues de densités $f_{X/A}$ et $f_{X/{}^cA}$ respectivement alors X est continue de densité
$$f_X(x) = P(A)\, f_{X/A}(x) + P({}^cA)\, f_{X/{}^cA}(x)$$

Dém : On a : $F_{X/A}(x) = \dfrac{P([X \leq x] \cap A)}{P(A)}$

et $F_{X/A}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X/A}(t)\,dt$ car F est f de répartition continue.

$$P([X \leq x] \cap A) = P(A)\, F_{X/A}(x) = P(A) \int_{-\infty}^{x} f_{X/A}(t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{x} P(A)\, f_{X/A}(t)\,dt$$

et comme $P({}^cA) = 1 - P(A) \neq 0$

Alors $P([X \leq x] \cap {}^cA) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P({}^cA)\, f_{X/{}^cA}(t)\,dt$.

mais $\left([X \leq x] \cap {}^cA\right) \cap \left([X \leq x] \cap A\right) = \phi$ et
$\left([X \leq x] \cap {}^cA\right) \cup \left([X \leq x] \cap A\right) = [X \leq x]$

donc
$$P(X \leq x) = P\left([X \leq x] \cap {}^cA\right) + P\left([X \leq x] \cap A\right)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[P(A) f_{X/A}(t) + P(^cA) f_{X/^cA}(t) \right] dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

par identification on obtient

$$f_X(x) = P(A) f_{X/A}(x) + P(^cA) f_{X/^cA}(x) ;$$

Variables aléatoires indépendantes :

Déf soit (X,Y) couple de v.a défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, les variable X et Y sont indépendantes ssi $\forall (A,B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^2)$

$$P_{X,Y}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) = P_X(A) P_Y(B)$$

Proposition soient (X,Y) couple de v.a.r, X, Y sont indépendantes ssi

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

Théorème (cas discret) soit (X,Y) couple de v.a.d, X, Y sont indep ssi

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

Dém voir polycopie P 11

Théorème (cas continue) : soient X et Y deux variables aléatoires absolument continues de densité de probabilité f_X et f_Y respectivement. X et Y sont indépendantes ssi le couple (X,Y) est absolument continues de densité

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Dém Soient X et Y deux v.a.c de densité f_X et f_Y resp ;

Supposons que le couple (X,Y) est abs continue et sa densité vérifie $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, on va demontrer que

X et Y sont indep $\Leftrightarrow$ à $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$

On a
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv \quad (\text{par définition})$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)\,f_Y(v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv$$
$$= F_X(x)\,F_Y(y)$$

$\Rightarrow$ X, Y sont indep.

réciproquement, Supposons que X et Y sont indep, on va montrer que le couple (X,Y) est contiu de densité $f_{X,Y}$ qui est vérifie
$f_{XY} = f_X f_Y$. Considerons la fonction $f = f_X f_Y$ — (*)

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)\,f_Y(v)\,du\,dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv = F_X(x)\,F_Y(y) \quad — (1)$$

et comme X et Y sont indep donc $F_X(x)F_Y(y) = F_{X,Y}(x,y)$

et de (1) on a $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$

comme $F_{X,Y}(x,y)$ est la fonction de répartition du couple (X,Y) et de (*) on a $f_{XY} = f_X f_Y$

$\Rightarrow f_{XY}$ est la densité du couple (X,Y)

Exemple soit $(X,Y)^t$ couple de v.a de loi uniforme sur $D = [-1,1]^2$

On a
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\,1_D(x,y) = \frac{1}{4}\,1_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y) = \frac{1}{4}\,1_{[-1,1]}(x)\,1_{[-1,1]}(y)$$
$$= \frac{1}{2}\,1_{[-1,1]}(x)\,\frac{1}{2}\,1_{[-1,1]}(y) = f_X(x)\,f_Y(y).$$

Remarque: Soit (X,Y) couple de v.a, si X, Y sont indep on a

cas discret $P(X=x_i \mid Y=y_j) = \dfrac{P(X=x_i)\,P(Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = P(X=x_i)$ loi marginale de X

cas continu $f_{X|Y}(x,y) = \dfrac{f_X(x)\,f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$.

* Théorème (des probabilités composées) : Soit (X,Y) couple de v.a.r continue

Alors $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y)\, f_X(x) = f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y)$; $\forall x,y \in \mathbb{R}$

Dém : On a $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y)\, f_X(x)$. — ①

et $f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y)$. — ②

Théorème (probabilités Totales) Soit (X,Y) couple de v.a.r continu

On a $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x)\, f_Y(y)\, dy$; $\forall x \in \mathbb{R}$; $f_Y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y)\, f_X(x)\, dx$ $\forall y \in \mathbb{R}$

Dém : On a $f_Y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx \overset{\text{de ①}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y)\, f_X(x)\, dx$, $\forall y \in \mathbb{R}$ — ③

et $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \overset{\text{de ②}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y)\, dy$, $\forall x \in \mathbb{R}$ — ④

Théorème (de Bayes) : Soit (X,Y) couple de v.a.r On a :

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{Y|X=x}(y)\, f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X=x}(y)\, f_X(x)\, dx} \; ; \; f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y)\, dy}$$

Dém On a $f_{X|Y=y} = \dfrac{f_{XY}}{f_Y}$ mais $f_{Y|X} = \dfrac{f_{XY}}{f_X} \Rightarrow f_{XY} = f_{Y|X}\, f_X$

donc $f_{X|Y=y} = \dfrac{f_{Y|X}\, f_X}{f_Y} \overset{\text{de ③}}{=} \dfrac{f_{Y|X}\, f_X}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y)\, f_X(x)\, dx}$.

et de même chose pour la deuxième.

Transformation d'un couple aléatoire :

Théorème Soit (X,Y) couple de v.a.d et $D \supset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $\phi : D \to \mathbb{R}$

Donc $Z = \phi(X,Y)$ est une variable aléatoire discrète définie sur $B \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et on a :

$$P_Z(z) = P(Z=z) = \sum_{(x,y)\in B} P(X=x, Y=y).$$

Théorème : Soit (X,Y) couple de v.a.c et $D \supset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $\phi : D \to \mathbb{R}$

donc $Z = \phi(X,Y)$ est une variable aléatoire continue définie sur $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ alors

$$F_Z(z) = \int_{(x,y)\in B} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Quelque cas particulier.

1) Somme de deux variables aléatoires indépendantes :

(a) Soient X, Y deux v.a continues indépendantes

$$F_{X+Y}(t) = P(X+Y \leq t) = \iint_{x+y\leq t} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{x+y\leq t} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= P(X \leq t-y ; Y \leq +\infty) = F(t-y, +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \left[\int_{-\infty}^{t-y} f_X(x)\,dx \right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y) f_Y(y)\,dy.$$

$$f_{X+Y}(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y) f_Y(y)\,dy \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} F_X(t-y) f_Y(y)\,dy$$

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-y) f_Y(y)\,dy = (f_X \circledast f_Y)(t)$$ Produit de convolution

b) Soient X, Y deux v.a discrètes indépendantes

$$P(X+Y=t) = P(X=x \in X(\Omega) \cap Y = t-x) \quad (1)$$

car $[X+Y=t] = [X \in X(\Omega)] \cap [X+Y=t] = [X \in X(\Omega)] \cap [Y = t-x]$

$$P(X+Y=t) = P\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} X=x, Y=t-x\right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=t-x)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) P(Y=t-x)$$

Exemple :

Soient X, Y deux v.a de loi uniforme sur $[0,1]$ c.à.d

$X, Y \sim U[0,1]$ donc $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0,1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

On pose $T = X+Y$ $\quad Y(\Omega), X(\Omega) = [0,1] \Rightarrow X(\Omega)+Y(\Omega) = T(\Omega) = [0,2]$.

$$f_T(t) = f_{X+Y}(t) = (f_X \circledast f_Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-y) f_Y(y)\, dy.$$

$f_X(t-y) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-y \in [0,1] \Leftrightarrow y \in [t-1, t] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

si $\underline{t<0}$ on a $t-1 \leq y \leq t \Rightarrow y < 0 \Rightarrow f_Y(y) = 0$.

$\Rightarrow f_{X+Y}(t) = 0$.

si $\underline{t>2}$ $\quad t-1 \leq y \Rightarrow 1 < t-1 \leq y \Rightarrow f_Y(y) = 0$.

$\Rightarrow f_{X+Y}(t) = 0$

si $\underline{0 \leq t \leq 1}$ $\Rightarrow -1 \leq t-1 \leq 0$ et $t-1 \leq y \leq t$ et $0 \leq y \leq 1$ $\quad (f_Y(y) \neq 0)$

$\Rightarrow t-1 \leq 0 \leq y \leq t \leq 1$

$$f_{X+Y}(t) = \int_0^t \underbrace{f_X(t-y)}_{\text{car } t-1 \leq 0 \leq y \leq t \leq 1} \overset{=1}{f_Y(y)}\,dy = \int_0^t dy = y\Big|_0^t = t.$$

si $\underline{1 \leq t \leq 2}$ $\quad 0 \leq t-1 \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $t-1 \leq y \leq t$

$\Rightarrow f_Y(y) = 1 \qquad \Rightarrow f_X(t-y) = 1$

donc $0 \leq t-1 \leq y \leq 1 \leq t$

$$f_{X+Y}(t) = \int_{t-1}^{1} dy = y\Big|_{t-1}^{1} = 1 - t + 1 = 2 - t$$

$$f_{X+Y}(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

2) Devision de deux variable v.a :

Soient X, Y deux variables aleatoires quelconques, la loi de la variable aleatoire $Z = \frac{X}{Y}$ est donnée par :

$$P_Z(z) = \sum_j |y_j|\, P(y_j z, y_j) \qquad \text{cas discret}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, f(yz, y)\,dy \qquad \text{cas Continue}$$

3) Maximum (Minimum) de deux v.a indépendantes

Soient X, Y deux variables aleatoires indépendantes

* si $Z = \max(X, Y)$ $\qquad F_Z(z) = F_X(z) F_Y(z)$

$$f_Z(z) = f_X(z) F_Y(z) + F_X(z) f_Y(z)$$

* si $Z = \min(X, Y)$

$$1 - F_Z(z) = (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)).$$

$$f_Z(z) = f_X(z)(1 - F_Y(z)) + (1 - F_X(z)) f_Y(z)$$

Vecteur aléatoire à plusieurs dimensions :

~~Déf~~ Déf * Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définis sur Ω dans $\mathbb{R}$, l'application X de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans l'espace Borel-mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ définie par

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$w \longmapsto X(w) = (X_1, \dots, X_n)^t(w) = (X_1(w), \dots, X_n(w))^t$$

s'appelle vecteur aléatoire défini sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ssi $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\{w \in \Omega \mid X_1(w) < x_1, \dots, X_n(w) < x_n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

notation : On pose

$[X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n] = \{w \in \Omega \mid X_1(w) < x_1, \dots X_n(w) < x_n\}$

* la loi d'un vecteur aléatoire X est la probabilité image de P par X notée P_X définie par :

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, 1]$$
$$B \longmapsto P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

* la loi P_X est appellé aussi la loi Conjointe et la loi de la ième variable de X notée P_{X_i} est la ième loi marginale.

Fonction ~~de~~ répartition Conjointe : Soit $(X_1, \dots, X_n)^t$ vecteur aléatoire la fonction de répartition ~~marg~~ Conjointe est

$$F_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto F_X(x) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$$
$$= P([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n])$$

Propriétés

* si $\forall i = \overline{1, n}$ $x_i = +\infty \Rightarrow F_X(+\infty, \dots, +\infty) = P(\Omega) = 1$.
* si $\exists i_0 \in \overline{1, n}$ tel que $x_{i_0} = -\infty \Rightarrow F_X(x_1, \dots, -\infty, \dots x_n) = P(\phi) = 0$.

Vecteur aléatoire discrète : On appelle vecteur aléatoire discrète l'application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$w \longmapsto X(w) = (X_1(w), \dots, X_n(w))^t$$

ou $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.d.

* On appelle la loi Conjointe de X l'application

$$P_X : X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$x=(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto P_X(x) = P(X=x) = P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$$
$$= P(X_1=x_1 \cap \cdots \cap X_n=x_n).$$

telles que

* $P_X(x) = P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) \geq 0,\ \forall x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
* $\sum_x P_X(x) = \sum_{x_1}\cdots\sum_{x_n} P_X(x_1,\ldots,x_n) = 1.$

Déf (Probabilité d'un événement)

$$P(B) = \sum_{x\in B} P_X(x) \qquad \text{telles que } X=(X_1,\ldots,X_n)^t,\ x=(x_1,\ldots,x_n)^t,\ B\in\mathcal{A}.$$

* Vecteur aléatoire absolument continu :

On dit qu'un vecteur aléatoire $X=(X_1,\ldots,X_n)^t$ est absolument continu s'il existe une fonction mesurable positive non nulle f_X, appelée densité conjointe, telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = 1.$$

et dans ce cas la fonction de répartition conjointe définit par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n.$$

Déf (Probabilité d'un événement)

$$P(B) = \int_B f_X(x)\,dx \qquad X=(X_1,\ldots,X_n)^t,\ x=(x_1,\ldots,x_n)^t,\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition :

$$f_X(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n}.$$

Distributions marginales :

Soit $(X_1,\ldots,X_m,X_{m+1},\ldots,X_n)^t$ un vecteur aléatoire de dimension "n" tel que $X_a=(X_1,\ldots,X_m)$ et $X_b=(X_{m+1},\ldots,X_n)$ deux sous vecteurs de X de dimension m et $n-m$ respectivement.