2) Couple de variables aléatoires

Déf ① Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, un couple aléatoire ou un vecteur de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ toute application mesurable $Z = (X, Y)$ définie par :

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$w \longmapsto (X,Y)(w) = (X(w), Y(w))^T$$

telle que $A_x = \{w \in \Omega \mid X(w) < x\} \in \mathcal{A}$ et $A_y = \{w \in \Omega \mid Y(w) < y\} \in \mathcal{A}$

ou $A_{x,y} = \{w \in \Omega \mid X(w) < x \text{ et } Y(w) < y\} \in \mathcal{A}$.

ou $\forall B = (B_1, B_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$\{w \in \Omega \mid X(w) \in B_1\} \in \mathcal{A}$, $\{w \in \Omega \mid Y(w) \in B_2\} \in \mathcal{A}$.

Notation soit (X,Y) couple de v.a de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, on note.
pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$$((X,Y) \in B) = \{w \in \Omega \mid (X(w), Y(w)) \in B\}.$$

Déf ② L'ensemble des valeurs possibles du couple est appelé ensemble de définition ou support du couple

$$D = (X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{w \in \Omega, (X(\Omega), Y(\Omega)) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exemple On lance deux dés

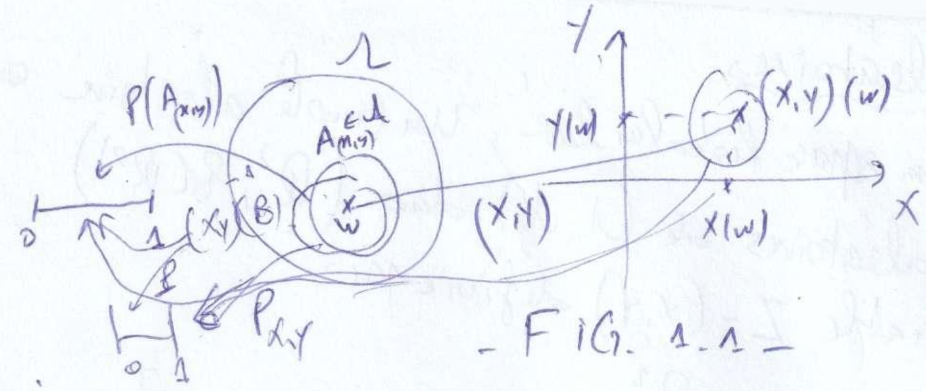
① On note X (resp. Y) le chiffre obtenu sur la face du premier dé (resp. 2ème dé) $D = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), \dots, (6,6)\}$

$= \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$

$\text{Card}\, D = \text{Card}\, X(\Omega) \times \text{Card}\, Y(\Omega) = 6 \times 6 = 36$.

② On note X (resp. Y) le plus petit chiffre obtenu (resp la somme de deux chiffres obtenus, donc le support du couple est

$D = \underbrace{\{1, 2, \dots, 6\}}_{X(\Omega)} \times \underbrace{\{2, \dots, 12\}}_{Y(\Omega)} = \{(1,2), (1,3), \dots, (1,6), (1,7);$
$(2,4), \dots, (2,8), (3,6), (3,7), (3,8), (3,9), (4,8)$
$(4,9), (4,10), (5,10), (5,11), (5,12), (6,12)\}$



– FIG. 1.1 –

<u>Probabilité Image</u> : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X,Y) un couple des v.a.r, l'application suivante

$$P_{XY} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto P_{XY}(B) = P((X,Y) \in B) = P\left((X,Y)^{-1}(B)\right)$$

est une probabilité sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ appelée probabilité image de P par le vecteur (X,Y) (voir FIG. 1.1)

<u>Déf</u> : soient (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) deux couples de v.a.r. On dit que (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont equidistribués lorsque

equiprobables

$$P_{X_1X_2}(B) = P_{Y_1Y_2}(B), \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

2-2) <u>Fonction de répartition d'un couple</u>

<u>Déf</u> : soit (X,Y) couple de v.a.r, on appelle fonction de répartition d'un couple (X,Y) l'application suivante

$$F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \longmapsto F_{X,Y}(x,y) = P\left([X \leq x] \cap [Y \leq y]\right) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

<u>Propriété</u> :

1) $0 \leq F(x,y) \leq 1, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $P(a < X \leq a+h, \ b < Y \leq b+h) = F_{X,Y}(a+h, b+k) - F_{XY}(a, b+k) - F_{X,Y}(a+h, b) + F_{X,Y}(a,b)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = \overset{F(-\infty,y)}{0}, \ \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)}_{=F(+\infty,y)} = F_Y(y), \ \forall y \in \mathbb{R}$

et même pour $x \in \mathbb{R}$.

3) $F_{X,Y}$ est croissante et continue à droite par rapport à chacune de ses variables.

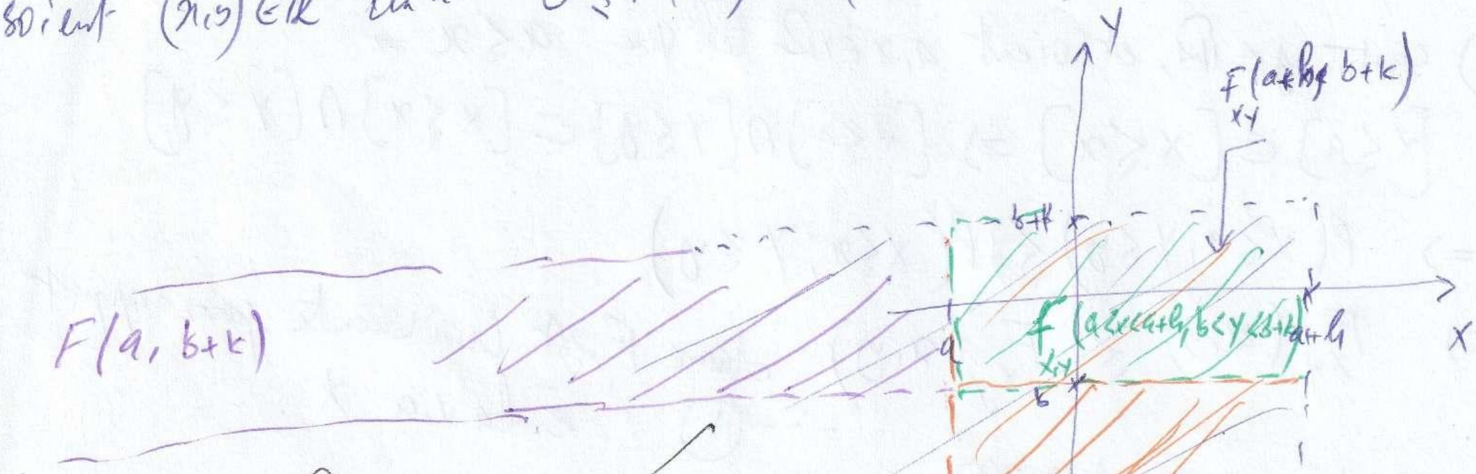
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lim\limits_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y)\right) = 1$.

$= F_{X,Y}(+\infty,+\infty)$

Dém :

1) soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a $0 \le F(x,y) = P(X\le x, Y\le y) \le 1$.

2)



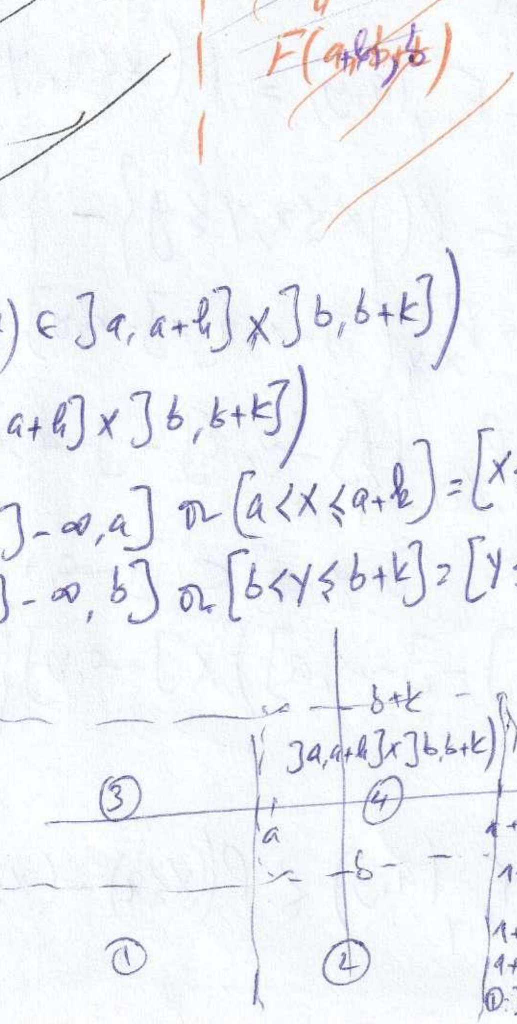
$P(a<X\le a+h, b<Y\le b+k) = P\left((X,Y)\in\,]a,a+h]\times]b,b+k]\right)$

$= P_{X,Y}(]a,a+h]\times]b,b+k])$

mais on a : $]a,a+h] =]-\infty,a+h] -]-\infty,a]$ or $[a<X\le a+h] = [X\le a+h] - [X\le a]$

$]b,b+k] =]-\infty,b+k] -]-\infty,b]$ or $[b<Y\le b+k] = [Y\le b+k] - [Y\le b]$

$]a,a+h]\times]b,b+k] =]-\infty,a+h]\times]-\infty,b+k]$
$-]-\infty,a]\times]-\infty,b+k] -]-\infty,a+h]\times]-\infty,b]$
$+]-\infty,a]\times]-\infty,b]$



a+h

$1+2+3+4 =]-\infty,a+h]\times]-\infty,b+k]$

$1+2 =]-\infty,a+h]\times]-\infty,b]$

$1+3 =]-\infty,a]\times]-\infty,b+k]$

$1 :]-\infty,a]\times]-\infty,b]$

p31

Donc

$$P_{XY}(]a,a+h]\times]b,b+k]) = P_{XY}(]-\infty,a+h]\times]-\infty,b+k]) - P_{XY}(]-\infty,a+h]\times]-\infty,b])$$
$$- P_{XY}(]-\infty,a]\times]-\infty,b+k]) + P_{XY}(]-\infty,a]\times]-\infty,b])$$

Car les ensemble sont deux à deux disjoints.

et $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

$$= F_{XY}(a+h,b+k) - F_{XY}(a,b+k) - F_{XY}(a+h,b) + F_{XY}(a,b).$$

3) soit $y \in \mathbb{R}$, et soient $a,x \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq x \Rightarrow$

$$[X\leq a] \subset [X \leq x] \Rightarrow [X\leq a]\cap[Y\leq y] \subset [X\leq x]\cap[Y\leq y]$$

$$\Rightarrow P(X\leq a, Y\leq y) \leq P(X\leq x, Y\leq y)$$

$$\Rightarrow F_{XY}(a,y) \leq F_{X,Y}(x,y) \quad \text{--- } 1$$ donc F est croissante par rapport à la v.a X.

et donc pour y aussi.

d'autre part :

$$F_{X,Y}(x,y) - F_{X,Y}(a,y) = P(X\leq x, Y\leq y) - P(X\leq a, Y\leq y)$$
$$= P(\{X\leq x, Y\leq y\} - \{X\leq a, Y\leq y\})$$
$$= P_{X,Y}(]-\infty,x]\times]-\infty,y] -]-\infty,a]\times]-\infty,y])$$
$$= P_{X,Y}(\{]-\infty,x] -]-\infty,a]\}\times]-\infty,y])$$

et Comme $]-\infty,y] \subset]-\infty,+\infty[$ donc

$$\{(]-\infty,x] -]-\infty,a])\times]-\infty,y]\} \subset \{]-\infty,x]-]-\infty,a]\times\mathbb{R}\}$$
$$\shortparallel$$
$$\{]-\infty,x]-]-\infty,a]\}$$

Donc

$$F_{X,Y}(x,y) - F_{X,Y}(a,y) \leq P((X\leq x)-(X\leq a))$$ mais

$[X \le x] - [X \le a] = [a < X \le x]$

Donc $P([X \le x] - [X \le a]) = P(a < X \le x) = F_X(x) - F_X(a)$.

On a de ①

$$0 \le F_{X,Y}(x,y) - F_{X,Y}(a,y) \le F_X(x) - F_X(a)$$

d'après la continue à droite de la fonction de répartition à une dimension alors $\lim_{x \to a^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(a,y)$

car $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$.

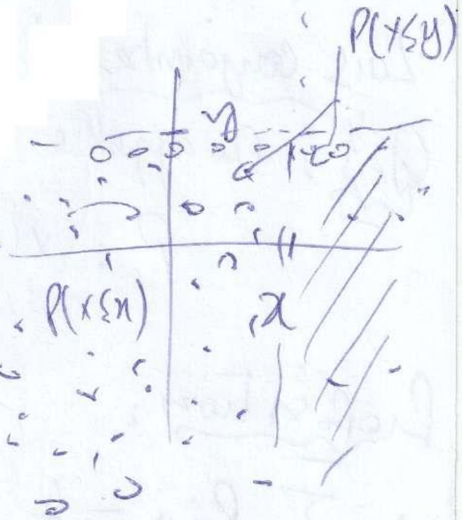
de même pour y.

4) * On sait que $[X \le x] \cap [Y \le y] \subset X \le x$

$P(X \le x, Y \le y) \le P(X \le x) \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) \le F_X(x)$.

$\lim_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) \le \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = P(\emptyset) = 0$

* $F_Y(y) - F_{XY}(x,y) = P(Y \le y) - P(X \le x, Y \le y)$



$= P([Y \le y] - [X \le x, Y \le y])$

$= P(X > x, Y \le y) \le P(X > x)$

$\le P(X > x)$

$= 1 - P(X \le x)$

$= 1 - F_X(x)$

donc comme $[X \le x, Y \le y) \subset [Y \le y]$

$\Rightarrow P(X \le x, Y \le y] \le P(Y \le y)$

$F_{XY}(x,y) \le F_Y(y) \Rightarrow F_Y(y) - F_{XY}(x,y) \ge 0$

$0 \leq F_{\cancel{X,Y}}(y) - F_{X,Y}(x,y) \leq 1 - F_X(x)$

par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} F_Y(y) - F_{X,Y}(x,y) \leq \lim (1 - \underbrace{F_X(x)}_{\to 1}) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$. même lors $\lim\limits_{y\to+\infty}$. — (2)

5) On passe à la limite dans (2) lorsque $y \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y\to+\infty} F_Y(y) = 1 .$$

même pour l'inverse

Couple de v.a discrètes :

soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X,Y) vecteurs des variables aléatoire discrètes de supports $X(\Omega) = \{x_i, i\in I \subset \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j\in J\subset \mathbb{N}\}$ respectivement donc le support de D est $(X,Y)(\Omega) = D = \{(x_i,y_j) \mid i,j \in I\times J \subset \mathbb{N}^2\}$.

Lois conjointes d'un couple de v.a. discrète : la fonction

Déf : On appelle loi conjointe du couple de v.a.d.

$$P : X(\Omega)\times Y(\Omega) = D \longrightarrow [0,1]$$
$$(x_i, y_i) \longmapsto P(x_i,y_i) = P(X=x_i, Y=y_i) = P_{ij}$$

Proposition :

1) $\sum\limits_{(x_i,y_j)\in D} P_{ij} = 1 = \sum\limits_{x_i\in X(\Omega)} \sum\limits_{y_j\in Y(\Omega)} P_{ij}$

2) $P(X\in A, Y\in B) = \sum\limits_{\substack{x_i\in A\\ y_j\in B}} P_{ij} = \sum\limits_{x_i\in A}\sum\limits_{y_j\in B} P_{ij}$ où $A\subset X(\Omega), B\subset Y(\Omega)$ où $A\times B\subset D$.

Remarque

On peut ecrire la loi conjointe du couple de v.a.d sous la forme du tableau suivant (Dans le cas fini)

$X \backslash Y$	y_1	- - -	y_m
x_1	p_{11}		p_{1m}
x_n	p_{n1}		p_{nm}

D fini si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis

Exemple Une urne contient 4 boules blanches, 2 boule noires 4 boules rouges, on extrait au hasard 3 boules de cette urne sans remise, on note X : "le nombre de boules blanche" et Y : "le nombre de boules noires" figurant parmi les trois boules tirées

$\text{card}(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

$D = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(1,2),(2,0),(2,1),(3,0)\}$

Pour determiner la loi conjointe, il faut calculer P_{ij} $i=\overline{0,3}$, $j=\overline{1,2}$

Donc

$P_{00} = P(X=0, Y=0) = P_{XY}(0,0) = P((X,Y)^{-1}(0,0))$

$= P((R,R,R)) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

$P_{01} = P_{XY}(0,1) = P(X=0, Y=1) = P(\{(N,R,R),(R,N,R),(R,R,N)\})$

$= \frac{C_2^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{4\times 6}{120} = \frac{6}{30}$

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	1/30	3/30	1/30	5/30
1	6/30	8/30	1/30	15/30
2	6/30	3/30	0	9/30
3	14/30	0/30	0	1/30
	14/30	14/30	2/30	1

Lois marginales d'un couple de v.a.d :

Prop : Soit (X,Y) couple de v.a.d telles que $X(\Omega)=\{x_i, i\in I\subset \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j, j\in J\subset\mathbb{N}\}$, les deux lois marginales de v.a.d X et Y sont définie par les fonctions $P_{i.}$ et $P_{.j}$ comme suit :

① $P_{i.} : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$$x_i \longmapsto P_{i.}(x_i) = P(X=x_i) = P_X(x_i) = \sum_{j\in J} P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_{j\in J} P_{ij}$$

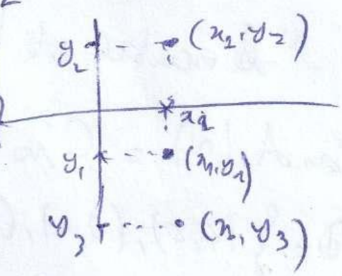
et $P_{.j} : Y(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$$y_j \longmapsto P_{.j}(y_j) = P_Y(y_j) = P(Y=y_j) = \sum_{i\in I} P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_{i\in I} P_{ij}$$

② $\sum_{i\in I} P_{i.} = \sum_{j\in J} P_{.j} = 1$

Dém : On a $\{X=x_i\} = \{X=x_i, Y\in Y(\Omega)\} = \{X=x_i, \bigcup_{j\in J} Y=y_j\}$

$$= \underbrace{\bigcup_{j\in J} \{X=x_i, Y=y_j\}}_{\text{des ensembles disjoint}}$$



$\{x_1\} = \{x_1, y\in\{y_1,y_2,y_3,\dots\}\}$

Donc

① $P_{i.} = P(X=x_i) = \sum_{j\in J} P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_{j\in J} P_{ij}$

la même chose $P_{.j}$

② $\sum_{i\in I} P_{i.} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P_{ij} = 1$

Exemple : calcul des lois marginales pour l'exemple précédant.

Remarque : les lois marginales ne permettent pas de déterminer la loi conjointe. mais l'inverse est vrai.

Exemple : Considérons (X,Y) couple de v.a.d telles que

$X(\Omega)=Y(\Omega)=\{0,1\}$ et $P(X=0,Y=0)=\beta=P(X=1,Y=1)$

et $D=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ $\quad P(X=0,Y=1)=\frac{1}{2}-\beta=P(X=1,Y=0)$

où $0\leq\beta\leq 1/2$.

$P(X=0) = P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1) = 1/2 = P(Y=0)$

$P(X=1) = P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1) = 1/2 = P(Y=1)$

Les deux lois marginales ne dépend pas de β mais la loi conjointe dépend de β. (la loi conjointe تحتوي على β لكن les lois marginales لا تحتاج β إذا من أين ستأتي بـ)

<u>Fonction de Répartition</u>: (voir page 3) soit (X,Y) couple de v.a.d

la fonction de répartition conjointe de (X,Y) est :

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

les fonctions de répartition marginales de X et de Y sont données par :

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{XY}(x,y) = F_{X,Y}(x,+\infty) = P(X \leq x)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(+\infty, y) = P(Y \leq y).$$

<u>Couple de variables aléatoires continues (v.a.c)</u> :

<u>Déf</u> : soit (X,Y) couple v.a. de loi conjointe $P_{X,Y}$, on dit que la loi $P_{X,Y}$ est continue (absolument continue) (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, s'il existe une fonction mesurable $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$A \longmapsto \underbrace{P_{X,Y}(A)}_{P((X,Y)\in A)} = \int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \cdot \mathbb{1}_A(x,y)\,dx\,dy.$$

La fonction f est appelée densité de probabilité conjointe (la loi) de (X,Y), on la note $f_{X,Y}(x,y)$.

<u>Propriétés</u>

1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
2. $\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$.
3. La fonction de répartition conjointe est définie par :

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dy = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\, dv\, dy.$$

4. Si f est Continue en (x_0, y_0) alors $f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x_0, y_0)$$

Q. 1 alors :

1) De la définition On a $\int f(x,y)\, dx\, dy = P_{X,Y}(x,y) \geq 0$

Il faut $f(x,y) \geq 0$ car si $f(x,y) \leq 0$ l'intégrale peut être négative absurde avec la probabilité $P_{X,Y}(x,y) \geq 0$.

2) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = P((X,Y) \in \mathbb{R}^2) = P(X \leq +\infty, Y \leq +\infty) = F(+\infty, +\infty) = 1.$

3. $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P_{X,Y}(]-\infty, x],]-\infty, y])$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv.$$

4. On a $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv.$

Donc $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\, du\, dv.$

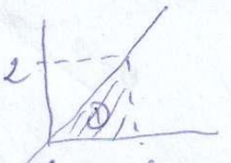
$\left|\int f(u,v)\, du\, dv\right| < 1$ donc elle C.U donc je peut permuter entre $\frac{\partial}{\partial x \partial y}$ et $\int$

donc Comme f est Contie en (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

Exemple : Soit (X,Y) couple de variables aléatoires de loi conjointe suivante

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2} & 0 \leq y \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

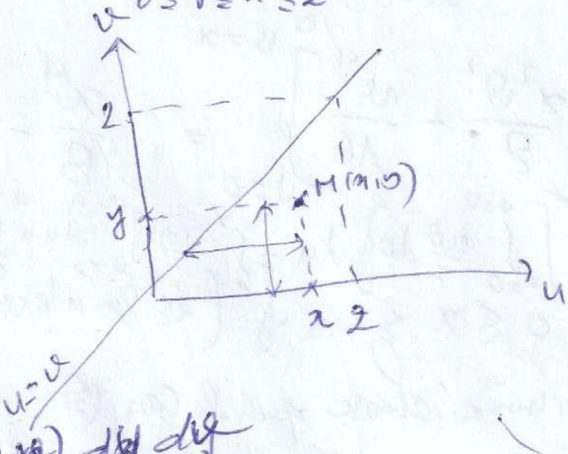


le support est $D = \{(x,y) \;/\; 0 \leq y \leq x \leq 2\}$

$$\int_0^2 \left[\int_v^2 f(u,v)\,du\right] dv = \int_0^2 \left[\int_0^u f(u,v)\,dv\right] du = 1$$

Calcule de fonction de répartition

1) si $0 \leq y \leq x \leq 2$



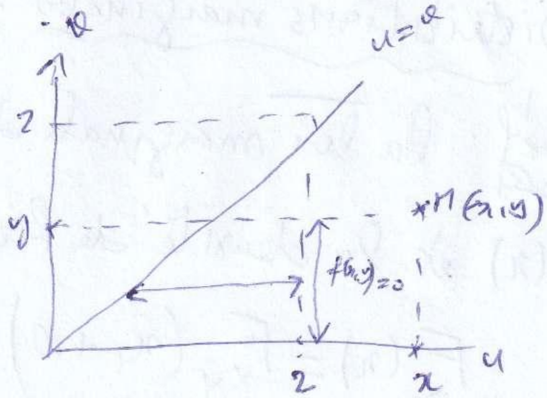
$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \int_0^y \left[\int_{u=v}^{u=x} f(u,v)\,du\right] dv = \int_0^y \left[\int_v^x \frac{uv}{2}\,du\right] dv$$

$$= \int_0^y \left[\frac{u^2 v}{4}\right]_{u=v}^{u=x} dv = \int_0^y \left(\frac{x^2 v}{4} - \frac{v^3}{4}\right) dv = \left[\frac{x^2 v^2}{8} - \frac{v^4}{16}\right]_{v=0}^{v=y}$$

$$= \frac{x^2 y^2}{8} - \frac{y^4}{16} = \frac{y^2}{8}\left(x^2 - \frac{y^2}{2}\right)$$

2) si $0 \leq y \leq 2 \leq x$



$$F(x,y) = \int_0^y \left[\int_{u=v}^{u=2} \frac{uv}{2}\,du\right] dv$$

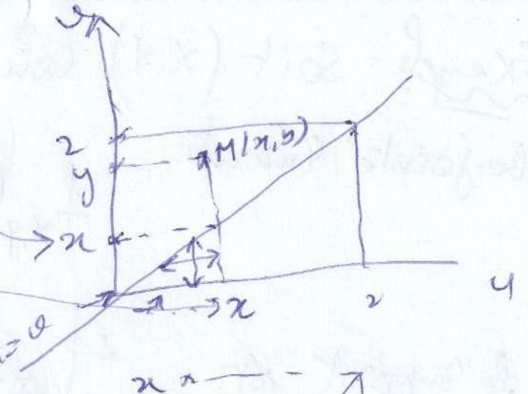
$$= \int_0^y \left[\frac{u^2 v}{4}\right]_{u=v}^{u=2} dv = \int_0^y \left(v - \frac{v^3}{4}\right) dv$$

$$= \left[\frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{16}\right]_0^y = \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16} = \frac{y^2}{2}\left(1 - \frac{y^2}{8}\right)$$

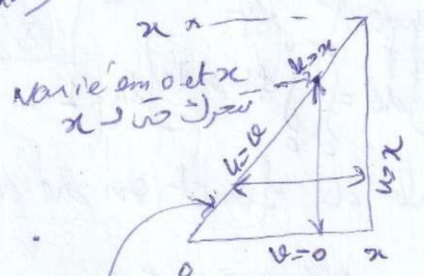
3)

3) si $0 \le x \le y \le 2$

$$F(x,y) = \int_{v=0}^{v=x}\left[\int_{u=v}^{u=x} \frac{uv}{2}\,du\right]dv$$

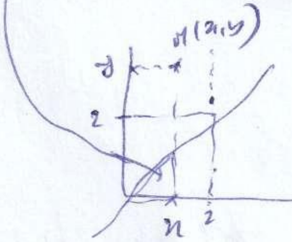


$$= \int_0^x \left[\frac{u^2 v}{4}\right]_{u=v}^{u=x} dv = \int_0^x \left[\frac{x^2 v}{4} - \frac{v^3}{4}\right]dv$$



$$= \left[\frac{x^2v^2}{8} - \frac{v^4}{16}\right]_{v=0}^{v=x} = \frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{16} = \frac{x^4}{16}.$$

ou bien $\int_{u=0}^{u=x}\left[\int_{v=0}^{v=u}\frac{uv}{2}\,dv\right]du = \int_0^x \left[\frac{uv^2}{2}\right]_{v=0}^{v=u} du = \int_0^x \frac{u^3}{4}\,du = \frac{x^4}{16}$

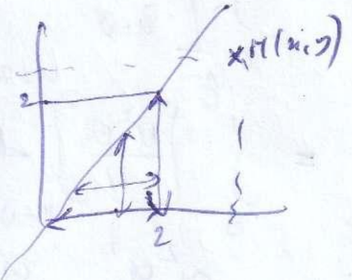


4) si $0 \le x \le 2 \le y$ (le cas n'existe pas)

la même chose que le cas (3) $0 \le x \le y \le 2$

5) si $x \ge 2$ et $y \ge 2$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy = 1$$



Distributions marginales :

Déf : la loi marginale de X possède la fonction de répartition $F_X(x)$ et la densité de probabilité $f_X(x)$ définies par :

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) \quad \text{et} \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy.$$

De même pour la fonction de répartition $F_Y(y)$ de Y et la densité $f_Y(y)$ de Y, on a

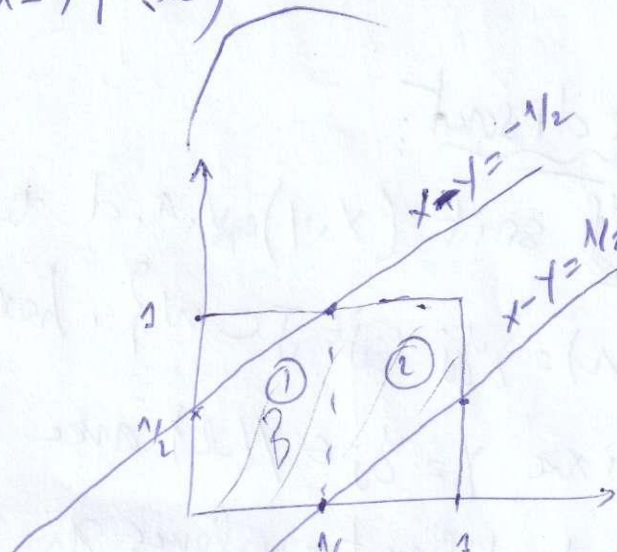
$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$$

Exemple On considère la densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y-2xy) & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) tracer le support du couple (X,Y)
2) Démontrer que $f_{X,Y}$ est une densité de probabilité
3) Calculer $P_{XY}(B)$ tel que $B \equiv \left(|X-Y| \leq \frac{1}{2}\right)$
4) Déterminer les lois marginales

Solution



1)

2) On a $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 1$ et

$$f(x,y) = 2(x+y-2xy) \geq 0$$

car pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $(x,y) \in [0,1]^2$

$0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1$ et $\frac{1}{y} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2$

$\frac{1}{y} \geq 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow 1 \geq 2y - \frac{y}{x} \Rightarrow 1 - 2y \geq -\frac{y}{x}$.

$x > 0 \Rightarrow x - 2xy \geq -y \Rightarrow x+y-2xy \geq 0$ et pour $(x,y) = (0,0)$

On a $f(0,0) = 0 \Rightarrow f(x,y) \geq 0$.

3) $P(B) = \iint_{①} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{②} f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^{1/2} \int_0^{x+1/2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{1/2}^{1} \int_{x-1/2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \frac{31}{48}.$$

4) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int^{1} f(x,y)\,dy = 1 = f_Y(y)$

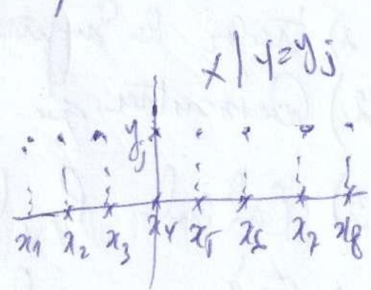
$\Rightarrow X$ et $Y \sim U[0,1]$.

Lois Conditionnelle

Déf : soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que $P(A) \neq \phi$

On appelle loi conditionelle de X sachant que A l'application suivante

$$P(\cdot / A) : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Cas discret :

Déf soit $(X, Y)_{\text{couple}}$ v.a.d tel que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$

$Y(\Omega) = \{y_j, j \in J \subset \mathbb{N}\}$, lorsque la variable aléatoire Y est fixée $Y = y_j \in Y(\Omega)$ avec $P_{\bullet j} = P(Y = y_j) \neq 0$, le couple (X, Y) prend differentes valeurs x_i tel que $(x_i, y_j) \in D$ $\forall i \in I$ (y_j fixée) ou D le support du couple $(D = X(\Omega) \times Y(\Omega))$

On peut definir une variable aleatoire unidimensionnelle X sachant que $Y = y_j$ dont la loi de probabilite est

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}}.$$

La variable aleatoire $X / Y = y_j$, $j \in J$ est appelée variable aleatoire conditionelle de X sachant que $Y = y_j$

De même on definit la variable aleatoire Y sachant que $X = x_i$ par $P(Y / X = x_i) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \dfrac{P_{ij}}{P_{i\bullet}}$

pour $P(X = x_i) \neq 0$.