الفصل الثاني: الاستقرارية والارتباط الذاتي والجزئي.

مفهوم وأهم الخصائص الإحصائية لاستقرارية السلسلة الزمنية (الاستقرارية).

قبل استخدام سلسلة زمنية في التنبؤ يجب في البداية التأكد من الخصائص العشوائية للسلسلة الزمنية.

حيث يجب أن تكون السلسلة الزمنية مستقرة إذا كانت خصائصها (المتوسط، التباين، التغاير) هي نفسها عند قياسها من أي مجال من مجالات السلسلة، بمعنى أنها مستقلة عن الزمن.

أي نقول أن السلسلة مستقرة إذا حققت الشروط التالية:

أ- ثبات المتوسط عبر الزمن $E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = \mu$

ب- ثبات التباين عبر الزمن $Var(Y_t) = Var(Y_{t+h}) = \sigma^2$

ج- استقلال التباين المشترك عبر الزمن $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)] = \gamma_h$

(2) من خلال هذا التعريف تكون السلسلة الزمنية التي تظهر اتجاهًا عامًا أو موسمية غير مستقرة.

كما أن التمثيل البياني للسلسلة يعطينا انطباعات عن استقرارية السلسلة من عدمها. غير أن هذا لا يكفي بل يجب الاعتماد على اختبارات إحصائية متخصصة نتعرف عليها لاحقا.

ملاحظة:

التعريف المذكور سابقا للاستقرارية هو ما يسمى عادة بالشبه الضعيف.

* سلسلة التشويش الأبيض أو الضجة البيضاء.

هي عبارة عن متتالية من المشاهدات المستقلة فيما بينها. ولها توزيعات متطابقة بمتوسط معدوم وتباين ثابت أي هي عملية عشوائية مستقرة. نرمز لها بالرمز ε_t لها الخصائص التالية:

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0 & \text{متوسطها مهما كان } t \\ Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 & \text{تباينها مهما كان } t \\ Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 & \text{تغايرها مهما كان } t \end{cases}$$

كيف نعرف الاستقرارية

• بالنسبة للعمليات العشوائية النظرية (مواضيع رياضية) نقوم بدراسة استقراريتها من خلال التحقق من الشروط الثلاث السابقة.

• بالنسبة للسلاسل الزمنية (عبارة عن متتابع قيم عددية) هناك اختبارات احصائية وطرق بيانية تستخدم لذلك من أشهرها (اختبار ديكي فولر، دالة الارتباط الذاتي) نتعرف عليها في المحاضرات القادمة.

مثال: ادرس استقرارية العمليات العشوائية التالية:

ε_t ضجة بيضاء.

$$Y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad x_0 = 0$$

الحل:

1 = $Y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

نتحقق من صحة الشروط السابقة الذكر.

أولا: $E(\varepsilon_t) = 0$

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$E(Y_t) = \cancel{E(\varepsilon_t)}^{0} - \cancel{E(\varepsilon_{t-1})}^{0}$$

$$E(Y_t) = 0$$

ثانيا: $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ (2)

$$\gamma_0 = Var(Y_t) = Var(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$= E(Y_t)^2$$

$$= E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$$

$$= E(\varepsilon_t^2 + \varepsilon_{t-1}^2 - 2\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})$$

$$= E(\varepsilon_t)^2 + E(\varepsilon_{t-1})^2 - 2\cancel{E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1})}^{0}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_k = Var(Y_t) = 2\sigma_\varepsilon^2$$

ثالثا: $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = E\left[(Y_t - \cancel{E(Y_t)}^{0})(Y_{t-k} - \cancel{E(Y_{t-k})}^{0})\right]$$

$$= E(Y_t \cdot Y_{t-k})$$

$$= E\left[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-1})\right]$$

$$= E(\cancel{\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}}^{0} - \cancel{\varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1}}^{0} - \cancel{\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}}^{0} + \cancel{\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}}^{0})$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$$

ومنه ف X_t عملية عشوائية مستقرة لأن كل من المتوسط والتباين ودالة التغاير مستقلة عن الزمن t.
(تسمى هذه العملية العشوائية بالمتوسطات المتحركة من الدرجة 1 (MA(1)))
نتطرق لها مستقبلا

② — $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad x_0 = 0$

لدينا

$X_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \quad , \quad X_{t-2} = X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$

$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

$= X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$

$= X_{t-3} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} \leftarrow$ بالتعويض

$= \cancel{X_0} + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

$X_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$

نتحقق من الشروط

$$\begin{cases} E(X_t) = E\left(\sum \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{t} E(\varepsilon_i) = 0 \\ Var(X_t) = t\,\sigma_\varepsilon^2 \\ Cov(X_t, X_{t-k}) = (t-k)\,\sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

③ إذن من خلال تباين العملية العشوائية ودالة تغايرها غير مستقلتان عن الزمن ومنه نستنتج أنها عملية عشوائية غير مستقرة
تعتبر هذه العملية من أشهر العمليات العشوائية غير المستقرة وتسمى بالمشي العشوائي (بدون انحراف)